.

Formeln der Pensionsversicherungsmathematik

Edgar Neuburger

- www.neuburger.com/formeln/formeln.html -

Kapitel 1

Die Barwerte der betrieblichen Altersversorgung nach dem Modell der „Richttafeln 1998“ in Summendarstellung

1.1 Vorbemerkungen

Im folgenden seien die üblichen Barwerte der betrieblichen Altersversorgung für eine Jahresrente vom Betrag 1 aufgelistet, und zwar sowohl für den Aktivenbestand als auch für den hieraus resultierenden Invaliden-, Gesamt-, Rentner- und Witwenbestand. Diese Barwerte werden in einer Form dargestellt, die unmittelbar für einen beliebigen Rentenvektor

$$R_k \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots$$

erweiterbar und damit besonders computergerecht ist: lautet die Formel für eine Jahresrente vom Betrag 1

$$\sum_{k \geq 0} v^k \ {}_k p_x \ L_{x+k} \,,$$

dann gewinnt man die Formel für den Barwert auf der Basis des Rentenvektors gemäß

$$\sum_{k \geq 0} v^k \ {}_k p_x \ R_k \ L_{x+k} \,.$$

Im folgenden seien der einfacheren Darstellung wegen gesetzt (z: Schlußalter für Aktive/Invalide, vgl. [1], S. 18):

$$q_x^g = q_x^r \quad \text{für} \quad x \geq z \quad \text{und} \quad q_x^i = q_x^r \quad \text{für} \quad x \geq z \,. \tag{1.1}$$

Des weiteren gilt für beliebige einfache Ordnungen (vgl. [2], Gl. (1))

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}p_x &= 1 - \frac{1}{2}q_x\,, \\
{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{1-q_x}{1-\frac{1}{2}q_x}\,,
\end{aligned}
$$

sodaß die Gleichung ${}_{\frac{1}{2}}p_x\,{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = p_x$ erfüllt ist. Analog für ${}_{\frac{1}{2}}q_x = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_x$ und ${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}$.

1.2 Jährlich gleichbleibende Renten

1.2.1 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^r$

Barwert des Anspruchs eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$
{}^{(t)}\mathrm{a}_x^r = \sum_{k\,\geq\,0} v^k\;{}_kp_x^r\;{}^{(t)}L_{x+k}^r = \mathrm{a}_x^r - k^{(t)}\,, \qquad x \geq z \tag{1.2}
$$

mit

$$
{}^{(t)}L_x^r = 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^r)\,, \qquad x \geq z
$$

und

$$
p_x^r = 1 - q_x^r\,,
$$

$$
{}_kp_x^r = \frac{l_{x+k}^r}{l_x^r} = \prod_{j\,=\,0}^{k-1} p_{x+j}^r \tag{1.3}
$$

sowie

$$
k^{(t)} = \frac{1+i}{t}\sum_{\lambda\,=\,0}^{t\,-\,1}\frac{\lambda}{t+\lambda i} \tag{1.4}
$$

(vgl. [2], Abschnitt 4).

1.2.2 $\,^{(t)}\mathbf{a}_y^w$

Barwert des Anspruchs einer Witwe des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}a_y^w \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} \; v^k \;\; {}_kp_y^w \;\; {}^{(t)}L_{y+k}^w \;=\; a_y^w \,-\, k^{(t)} \tag{1.5}$$

mit

$$^{(t)}L_y^w \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_y^w)$$

und

$$p_y^w \;=\; 1 \,-\, q_y^w\,,$$

$${}_kp_y^w \;=\; \frac{l_{y+k}^w}{l_y^w} \;=\; \prod_{j\,=\,0}^{k-1} \; p_{y+j}^w \tag{1.6}$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4)

(vgl. [2], Abschnitt 4).

1.2.3 $\,^{(t)}\mathbf{a}_x^g$

Barwert des Anspruchs einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}a_x^g \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} \; v^k \;\; {}_kp_x^g \;\; {}^{(t)}L_{x+k}^g \;=\; a_x^g \,-\, k^{(t)}$$

mit

$$^{(t)}L_x^g \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^g)$$

und

$$p_x^g \;=\; 1 \,-\, q_x^g\,,$$

$${}_kp_x^g \;=\; \frac{l_{x+k}^g}{l_x^g} \;=\; \prod_{j\,=\,0}^{k-1} \; p_{x+j}^g \tag{1.7}$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4)

(vgl. [2], Abschnitt 4, auch Gl. (1.1)).

1.2.4 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{rw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{rw}$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}a_x^{rw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} v^k \;{}_kp_x^r \;{}^{(t)}L_{x+k}^{rw} \;=\; a_x^{rw}\,, \qquad x \geq z \tag{1.8} $$

mit

$$ {}^{(t)}L_x^{rw} \;=\; q_x^r \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \;{}^{(t)}a_{y(x)+\frac{1}{2}}^w\,, \qquad x \geq z\,, $$

$$ {}^{(t)}a_{y+\frac{1}{2}}^w \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w \; a_{y+1}^w \tag{1.9} $$

sowie ${}_kp_x^r$ gemäß Gl. (1.3) und a_y^w gemäß Gl. (1.5).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}a_{xy}^{rw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} v^k \;{}_kp_x^r \;{}_kp_y^b \;{}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{rw} \;=\; a_{xy}^{rw}\,, \qquad x \geq z \tag{1.10} $$

mit

$$ {}^{(t)}L_{xy}^{rw} \;=\; q_x^r \;{}_{\frac{1}{2}}p_y^b \; v^{\frac{1}{2}} \;{}^{(t)}a_{y+\frac{1}{2}}^w\,, \qquad x \geq z $$

sowie ${}_kp_x^r$ gemäß Gl. (1.3), ${}^{(t)}a_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.9) und

$$ {}_kp_y^b \;=\; \frac{l_{y+k}^b}{l_y^b} \;=\; \prod_{j\,=\,0}^{k-1} p_{y+j}^b\,. \tag{1.11} $$

Dabei verweist der Index b auf einen geeigneten Ehegattenbestand

(vgl. [2], Abschnitt 6).

1.2.5 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{gw}$ bzw. $^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{gw}$

Barwert der Anwartschaft einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{gw} \;=\; \sum_{k\geq 0} v^k \;{}_kp_x^g \;{}^{(t)}L_{x+k}^{gw} \;=\; \mathrm{a}_x^{gw}$$

mit

$$^{(t)}L_x^{gw} \;=\; q_x^g \;h_x \;v^{\frac{1}{2}} \;{}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$$

sowie ${}_kp_x^g$ gemäß Gl. (1.7) und ${}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (1.9).

Individualmethode:

$$^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{gw} \;=\; \sum_{k\geq 0} v^k \;{}_kp_x^g \;{}_kp_y^b \;{}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{gw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{gw}$$

mit

$$^{(t)}L_{xy}^{gw} \;=\; q_x^g \;{}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;v^{\frac{1}{2}} \;{}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}}$$

sowie ${}_kp_x^g$ gemäß Gl. (1.7), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (1.9)

(vgl. [2], Abschnitt 6, auch Gl. (1.1)).

1.2.6 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{i}$

Barwert des Anspruchs eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{i} \;=\; \sum_{k\geq 0} v^k \;{}_kp_x^i \;{}^{(t)}L_{x+k}^{i} \;=\; \mathrm{a}_x^{i} - k^{(t)} \tag{1.12}$$

mit

$$^{(t)}L_x^{i} \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^i)\,,$$

$$p_x^i \;=\; 1 - q_x^i$$

und

$$_k p_x^i \;=\; \frac{l_{x+k}^i}{l_x^i} \;=\; \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}^i \tag{1.13}$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4)

(vgl. [2], Abschnitt 4, auch Gl. (1.1)).

1.2.7 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{iw}$ bzw. $^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{iw}$

Barwert der Anwartschaft eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{iw} \;=\; \sum_{k \ge 0} v^k \;\, _k p_x^i \;\, ^{(t)}L_{x+k}^{iw} \;=\; \mathrm{a}_x^{iw} \tag{1.14}$$

mit

$$^{(t)}L_x^{iw} \;=\; q_x^i \;\, h_x \;\, v^{\frac{1}{2}} \;\, ^{(t)}\mathrm{a}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w$$

sowie $_k p_x^i$ gemäß Gl. (1.13) und $^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.9).

Individualmethode:

$$^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{iw} \;=\; \sum_{k \ge 0} v^k \;\, _k p_x^i \;\, _k p_y^b \;\, ^{(t)}L_{x+k,y+k}^{iw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{iw} \tag{1.15}$$

mit

$$^{(t)}L_{xy}^{iw} \;=\; q_x^i \;\, _{\frac{1}{2}}p_y^b \;\, v^{\frac{1}{2}} \;\, ^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w$$

sowie $_k p_x^i$ gemäß Gl. (1.13), $_k p_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und $^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.9)

(vgl. [2], Abschnitt 6, auch Gl. (1.1)).

1.2.8 $^{(t)}\mathbf{a}_x^a$

Barwert des Anspruchs eines Aktiven des Alters x auf eine über die Aktivenzeit laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. (Aktivenrentenbarwert):

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^a \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;L_{x+k}^a \;=\; \mathrm{a}_x^a \;-\; k^{(t)}(1 - v^n \;{}_np_x^a)\,, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}L_x^a \;=\; \begin{cases} 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^a) & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases},$$

$$p_x^a \;=\; 1 \;-\; i_x \;-\; q_x^{aa}\,,$$

$${}_kp_x^a \;=\; \frac{l_{x+k}^a}{l_x^a} \;=\; \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}^a\,, \tag{1.16}$$

$$n \;=\; z \;-\; x \qquad \text{mit} \qquad z = \text{Schlußalter für Aktive/Invalide} \tag{1.17}$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4).

1.2.9 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{aA}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Altersrente vom Jahresbetrag 1 ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{aA} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}^{(t)}L_{x+k}^{aA} \;=\; v^n \;{}_np_x^a \;{}^{(t)}\mathrm{a}_z^r\,, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}L_x^{aA} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ ^{(t)}\mathrm{a}_z^r & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16) und $^{(t)}\mathrm{a}_z^r$ gemäß Gl. (1.2).

1.2.10 $\,^{(t)}\mathbf{a}_x^{ai}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;\,^{(t)}L_{x+k}^{ai} \;=\; \mathrm{a}_x^{ai}\,, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}L_x^{ai} \;=\; \begin{cases} i_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\,^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

und

$$^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;\,{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} \;\; \mathrm{a}_{x+1}^{i} \tag{1.18}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16) und a_x^i gemäß Gl. (1.12)

(vgl. [2], Abschnitt 5).

1.2.11 $\,^{(t)}\mathbf{a}_x^{aiA}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Alters- und Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{aiA} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;\,^{(t)}L_{x+k}^{aiA} \;=\; {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai} + {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{aA}\,, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}L_x^{aiA} \;=\; \begin{cases} i_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\,^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} & \text{für} \quad x < z \\ ^{(t)}\mathrm{a}_z^{r} & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), $^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i}$ gemäß Gl. (1.18) und $^{(t)}\mathrm{a}_z^r$ gemäß Gl. (1.2).

1.2.12 $^{(t)}\breve{\mathbf{a}}_x^{aaw}$ bzw. $^{(t)}\breve{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\breve{a}_x^{aaw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}^{(t)}\breve{L}_{x+k}^{aaw} \;=\; \breve{a}_x^{aaw}\,, \qquad x \le z$$

mit

$$^{(t)}\breve{L}_x^{aaw} \;=\; \begin{cases} q_x^{aa}\;\; h_x\;\; v^{\frac{1}{2}}\;\; {}^{(t)}a^w_{y(x)+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16) und ${}^{(t)}a^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (1.9).

Individualmethode:

$$^{(t)}\breve{a}_{xy}^{aaw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}_kp_y^b \;{}^{(t)}\breve{L}_{x+k,y+k}^{aaw} \;=\; \breve{a}_{xy}^{aaw}\,, \qquad x \le z$$

mit

$$^{(t)}\breve{L}_{xy}^{aaw} \;=\; \begin{cases} q_x^{aa}\;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b\;\; v^{\frac{1}{2}}\;\; {}^{(t)}a^w_{y+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(t)}a^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (1.9)

(vgl. [2], Abschnitt 6).

1.2.13 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{aAw}$ bzw. $^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aAw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}a_x^{aAw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}^{(t)}L_{x+k}^{aAw} \;=\; v^n \;{}_np_x^a \;{}^{(t)}a_z^{rw} \;=\; a_x^{aAw}\,, \qquad x \le z$$

mit

$$ {}^{(t)}L_x^{aAw} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16) und ${}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw}$ gemäß Gl. (1.8).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aAw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{aAw} \;=\; v^n \;\; {}_np_x^a \;\; {}_np_y^b \;\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{aAw} \, , $$

mit

$$ {}^{(t)}L_{xy}^{aAw} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw}$ gemäß Gl. (1.10).

1.2.14 $\;{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aaw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver bzw. nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{aaw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}^{(t)}L_{x+k}^{aaw} \;=\; \mathrm{a}_x^{aaw} \, , \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}L_x^{aaw} \;=\; \begin{cases} q_x^{aa} \;\; h_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w} & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} \tag{1.19} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (1.9) und ${}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw}$ gemäß Gl. (1.8).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aaw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{aaw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{aaw} \, , \qquad x \le z $$

mit

$$
{}^{(t)}L_{xy}^{aaw} \;=\; \begin{cases} q_x^{aa} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} \tag{1.20}
$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11), ${}^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.9) und ${}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw}$ gemäß Gl. (1.10)

(vgl. [2], Abschnitt 6).

1.2.15 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aiw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aiw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Invalider, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$
{}^{(t)}\mathrm{a}_x^{aiw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}^{(t)}L_{x+k}^{aiw} \;=\; \mathrm{a}_x^{aiw}\,, \qquad x \leq z
$$

mit

$$
{}^{(t)}L_x^{aiw} \;=\; \begin{cases} i_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, \tag{1.21}
$$

$$
{}^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \left[\;{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \;\; \mathrm{a}_{x+1}^{iw} \;+\; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^i \;\; h_x \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y(x)+\frac{1}{2}}^w \;\; \mathrm{a}_{y(x)+1}^w \right] \tag{1.22}
$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), a_x^{iw} gemäß Gl. (1.14) und a_y^w gemäß Gl. (1.5).

Individualmethode:

$$
{}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aiw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{aiw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{aiw}\,, \qquad x \leq z
$$

mit

$$
{}^{(t)}L_{xy}^{aiw} \;=\; \begin{cases} i_x \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, \tag{1.23}
$$

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \left[\;{}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}\;\; {}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y+\frac{1}{2}}\;\; \mathrm{a}^{iw}_{x+1,y+1} \;+\; {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+\frac{1}{2}}\;\; {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+\frac{1}{2}}\;\; \mathrm{a}^{w}_{y+1}\right] \tag{1.24} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp^a_x$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp^b_y$ gemäß Gl. (1.11), a^{iw}_{xy} gemäß Gl. (1.15) und a^w_y gemäß Gl. (1.5)

(vgl. [2], Abschnitt 7).

1.2.16 ${}^{(t)}\mathbf{a}^{aw}_x$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}^{aw}_{xy}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 (gleichgültig ob bei Tod als Aktiver, Invalidenrentner oder Altersrentner), vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{aw}_x \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k\;\; {}_kp^a_x\;\; {}^{(t)}L^{aw}_{x+k} \;=\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{aaw}_x + {}^{(t)}\mathrm{a}^{aiw}_x \;=\; \mathrm{a}^{aw}_x\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}L^{aw}_x \;=\; {}^{(t)}\check{L}^{aaw}_x + {}^{(t)}L^{aAw}_x + {}^{(t)}L^{aiw}_x \;=\; {}^{(t)}L^{aaw}_x + {}^{(t)}L^{aiw}_x\,, \qquad x \le z $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp^a_x$ gemäß Gl. (1.16), ${}^{(t)}L^{aaw}_x$ gemäß Gl. (1.19) und ${}^{(t)}L^{aiw}_x$ gemäß Gl. (1.21).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{aw}_{xy} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k\;\; {}_kp^a_x\;\; {}_kp^b_y\;\; {}^{(t)}L^{aw}_{x+k,y+k} \;=\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{aaw}_{xy} + {}^{(t)}\mathrm{a}^{aiw}_{xy} \;=\; \mathrm{a}^{aw}_{xy}\,, \qquad x \le $$

mit

$$ {}^{(t)}L^{aw}_{xy} \;=\; {}^{(t)}\check{L}^{aaw}_{xy} + {}^{(t)}L^{aAw}_{xy} + {}^{(t)}L^{aiw}_{xy} \;=\; {}^{(t)}L^{aaw}_{xy} + {}^{(t)}L^{aiw}_{xy}\,, \qquad x \le z $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp^a_x$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp^b_y$ gemäß Gl. (1.11), ${}^{(t)}L^{aaw}_{xy}$ gemäß Gl. (1.20) und ${}^{(t)}L^{aiw}_{xy}$ gemäß Gl. (1.23).

1.3 Renten mit Rentendynamik

1.3.1 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^r$

Barwert des Anspruchs eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_x^r \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^k \;\; {}_kp_x^r \;\; {}^{(t)}L_{x+k}^r\,, \qquad x \geq z \tag{1.25} $$

mit

$$ {}^{(t)}L_x^r \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^r)\,, \qquad x \geq z $$

sowie ${}_kp_x^r$ gemäß Gl. (1.3) und $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4); zudem sei für beliebiges $c \in \mathbb{R}$:

$$ [c] \in \mathbb{Z}\;:\;\; \text{größte ganze Zahl mit } [c] \leq c \tag{1.26} $$

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3).

1.3.2 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_y^w$

Barwert des Anspruchs einer Witwe des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_y^w \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^k \;\; {}_kp_y^w \;\; {}^{(t)}L_{y+k}^w \tag{1.27} $$

mit

$$ {}^{(t)}L_y^w \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_y^w) $$

sowie ${}_kp_y^w$ gemäß Gl. (1.6) und $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4)

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch (1.26)).

1.3.3 $\;{}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^g$

Barwert des Anspruchs einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^g \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^k \;\; {}_kp_x^g \;\; {}^{(t)}L_{x+k}^g $$

mit

$$ {}^{(t)}L_x^g \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^g) $$

sowie ${}_kp_x^g$ gemäß Gl. (1.7) und $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4)

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch Gl. (1.1) und (1.26)).

1.3.4 $\;{}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{rw}$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_{xy}^{rw}$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^{rw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^k \;\; {}_kp_x^r \;\; {}^{(\langle\frac{h+k}{m}\rangle,t)}\hat{L}_{x+k}^{rw}\,, \qquad x \geq z \tag{1.28} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{L}_x^{rw} \;=\; q_x^r \;\; h_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w\,, \qquad x \geq z\,, $$

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w \;\; \left(k^{(t)} \;+\; {}^{(h+1,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+1}^w\right) \tag{1.29} $$

sowie ${}_kp_x^r$ gemäß Gl. (1.3), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4) und ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w$ gemäß Gl. (1.27); zudem sei für $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$:

$$ \left\langle \frac{k}{m} \right\rangle : \;\; \text{ganzzahliger Rest der Division } \frac{k}{m} \tag{1.30} $$

(vgl. [2], Gl. (49)).

Individualmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{rw}_{xy} = \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\ v^k\ {}_kp^r_x\ {}_kp^b_y\ {}^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{L}^{rw}_{x+k,y+k}\,, \qquad x \geq z (1.31) $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{L}^{rw}_{xy} = q^r_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^b_y\ v^{\frac{1}{2}}\ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}}\,, \qquad x \geq z $$

sowie ${}_kp^r_x$ gemäß Gl. (1.3), ${}_kp^b_y$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (1.29)

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch (1.26)).

1.3.5 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}^{gw}_x$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}^{gw}_{xy}$

Barwert der Anwartschaft einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{gw}_{x} = \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\ v^k\ {}_kp^g_x\ {}^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{L}^{gw}_{x+k} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{L}^{gw}_{x} = q^g_x\ h_x\ v^{\frac{1}{2}}\ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{w}_{y(x)+\frac{1}{2}} $$

sowie ${}_kp^g_x$ gemäß Gl. (1.7) und ${}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (1.29).

Individualmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{gw}_{xy} = \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\ v^k\ {}_kp^g_x\ {}_kp^b_y\ {}^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{L}^{gw}_{x+k,y+k} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{L}^{gw}_{xy} = q^g_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^b_y\ v^{\frac{1}{2}}\ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}} $$

sowie ${}_kp_x^g$ gemäß Gl. (1.7), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (1.29)

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch Gl. (1.1), (1.26) und (1.30)).

1.3.6 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^i$

Barwert des Anspruchs eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$
{}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^i \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; v^k \; {}_kp_x^i \; {}^{(h,t)}L_{x+k}^i \tag{1.32}
$$

mit

$$
{}^{(h,t)}L_x^i \;=\; 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^i)
$$

sowie ${}_kp_x^i$ gemäß Gl. (1.7) und $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4)

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch Gl. (1.1) und (1.26)).

1.3.7 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{iw}$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_{xy}^{iw}$

Barwert der Anwartschaft eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

Kollektivmethode:

$$
{}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^{iw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; v^k \; {}_kp_x^i \; {}^{(\langle\frac{h+k}{m}\rangle,t)}\hat{L}_{x+k}^{iw}
$$

mit

$$
{}^{(h,t)}\hat{L}_x^{iw} \;=\; q_x^i \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w}
$$

sowie ${}_kp_x^i$ gemäß Gl. (1.7) und ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (1.29).

Individualmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{xy}^{iw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^k \;\; {}_kp_x^i \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{L}_{x+k,y+k}^{iw} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{L}_{xy}^{iw} \;=\; q_x^i \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w} $$

sowie ${}_kp_x^i$ gemäß Gl. (1.7), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (1.29)

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch Gl. (1.1), (1.26) und (1.30)).

1.3.8 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{ai}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{ai} \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{n} v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}^{(t)}\tilde{L}_{x+k}^{ai}\,, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{L}_x^{ai} \;=\; \begin{cases} i_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+\frac{1}{2}}^{i} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} $$

und

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+\frac{1}{2}}^{i} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} \;\; \left(k^{(t)} \;+\; {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_{x+1}^{i} \;+\; \sigma \;\; {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_{x+1}^{i}\right)\,, \tag{1.33} $$

$$ {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_x^{i} \;=\; \sum_{k\,\in\,J} s^{\left[\frac{k}{m}\right]}\, v^k \;{}_kp_x^i \left[\frac{t-1}{2t} \;-\; \kappa^{(t)}\left(1 - v p_{x+k}^i\right)\right] \tag{1.34} $$

mit

$$ J \;= \{m{-}1,\, 2m{-}1,\, \ldots\} \tag{1.35} $$

und

$$\kappa^{(t)} \;=\; \frac{1+i}{t^2} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda^2}{t+\lambda i} \tag{1.36}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_k p_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_k p_x^i$ gemäß Gl. (1.13), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4) und ${}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_x^i$ gemäß Gl. (1.32)

(vgl. [2], Abschnitt 11, auch (1.26)).

1.3.9 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aiA}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Alters- und Invalidenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität bzw. ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$${}^{(t)}\tilde{\text{a}}_x^{aiA} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;\, {}_k p_x^a \;\, {}^{(t)}\tilde{L}_{x+k}^{aiA}\,, \qquad x \le z$$

mit

$${}^{(t)}\tilde{L}_x^{aiA} \;=\; \begin{cases} i_x \;\, v^{\frac{1}{2}} \;\, {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{x+\frac{1}{2}}^i & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_z^r & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_k p_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{x+\frac{1}{2}}^i$ gemäß Gl. (1.33) und ${}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_z^r$ gemäß Gl. (1.25).

1.3.10 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aaw}$ bzw. ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod als Aktiver mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt des Todes, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$${}^{(t)}\tilde{\text{a}}_x^{aaw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;\, {}_k p_x^a \;\, {}^{(t)}\tilde{L}_{x+k}^{aaw}\,, \qquad x \le z$$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aaw} \;=\; \begin{cases} q_x^{aa} \;\; h_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} \tag{1.37} $$

und

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^{w} \;\; \left(k^{(t)} \;+\; {}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_{y+1}^{w} \;+\; \sigma \;\; {}^{(t)}\Delta\text{a}_{y+1}^{w}\right), \tag{1.38} $$

$$ {}^{(t)}\Delta\text{a}_y^w \;=\; \sum_{k\,\in\,J} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \, v^k \; {}_kp_y^w \left[\frac{t-1}{2t} \;-\; \kappa^{(t)}\left(1 - vp_{y+k}^w\right)\right] \tag{1.39} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^w$ gemäß Gl. (1.6), ${}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_y^w$ gemäß Gl. (1.27), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4), $\kappa^{(t)}$ gemäß Gl. (1.36) und J gemäß Gl. (1.35).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{xy}^{aaw} \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{(t)}\tilde{L}_{x+k,y+k}^{aaw}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aaw} \;=\; \begin{cases} q_x^{aa} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} \tag{1.40} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(t)}\tilde{\text{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (1.38)

(vgl. [2], Abschnitt 11, auch (1.26)).

1.3.11 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aAw}$ bzw. ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_{xy}^{aAw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Erreichen der Altersgrenze, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_x^{aAw} \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}^{(t)}\tilde{L}_{x+k}^{aAw}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aAw} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(0,t)}\hat{ä}_z^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} \tag{1.41} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16) und ${}^{(0,t)}\hat{ä}_z^{rw}$ gemäß Gl. (1.28).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{ä}_{xy}^{aAw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}_kp_y^b \;{}^{(t)}\tilde{L}_{x+k,y+k}^{aAw}, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aAw} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(0,t)}\hat{ä}_{z,y+n}^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} \tag{1.42} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(0,t)}\hat{ä}_{z,y+n}^{rw}$ gemäß Gl. (1.31).

1.3.12 ${}^{(t)}\tilde{ä}_x^{aiw}$ bzw. ${}^{(t)}\tilde{ä}_{xy}^{aiw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod als Invalider mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{ä}_x^{aiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}^{(t)}\tilde{L}_{x+k}^{aiw}, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aiw} = \begin{cases} i_x \; v^{\frac{1}{2}} \;{}^{(t)}\tilde{ä}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}, \tag{1.43} $$

$$ {}^{(t)}\tilde{ä}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} = v^{\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \;{}^{(t)}\tilde{ä}_{x+1}^{iw} + {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^i \; h_x \;{}^{(t)}\tilde{ä}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}^{(t)}\tilde{ä}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.38) und

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{iw} \;=\; \sum_{k\,\ge\,0} \; s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \; v^k \;\; {}_kp_x^i \;\; {}^{(\langle \frac{k}{m}\rangle ,t)}\tilde{L}_{x+k}^{iw} $$

mit

$$ \begin{aligned} {}^{(h,t)}\tilde{L}_x^{iw} &= q_x^i \;\; h_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(h,t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w \,, \\ {}^{(h,t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w &= v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w \;\; \left(\tilde{k}^{(h,t)} \;+\; {}^{(h+1,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+1}^w \;+\; \sigma \;\; {}^{(h+1,t)}\Delta \mathrm{a}_{y+1}^w \right) \,, \qquad (1.44) \\ {}^{(h,t)}\Delta \mathrm{a}_y^w &= \sum_{k\,\in\,J} \; s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \, v^k \; {}_kp_y^w \; \left[\frac{t-1}{2t} \;-\; \kappa^{(t)} \left(1 - v p_{y+k}^w\right) \right] \,, \\ \tilde{k}^{(h,t)} &= \begin{cases} k^{(t)} & \text{für} \quad h = 0, 1, \ldots, m-2 \\ k^{(t)} + \sigma\, \kappa^{(t)} & \text{für} \quad h = m-1 \end{cases} \end{aligned} $$

sowie ${}_kp_x^i$ gemäß Gl. (1.13), ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w$ gemäß Gl. (1.27), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (1.4), $\kappa^{(t)}$ gemäß Gl. (1.36) und J gemäß Gl. (1.35).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{xy}^{aiw} \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{n} \; v^k \;\; {}_kp_x^a \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{(t)}\tilde{L}_{x+k,y+k}^{aiw} \,, \qquad x \le z $$

mit

$$ \begin{aligned} {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aiw} &= \begin{cases} i_x \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} \,, \qquad (1.45) \\ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}}^{iw} &= v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^b \;\; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+1,y+1}^{iw} \;+\; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^i \;\; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w \end{aligned} $$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11), ${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.38)

und

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{xy}^{iw} \;=\; \sum_{k\,\ge\,0} \; s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \; v^k \;\; {}_kp_x^i \;\; {}_kp_y^b \;\; {}^{(\langle \frac{k}{m}\rangle ,t)}\tilde{L}_{x+k,y+k}^{iw} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\tilde{L}_{xy}^{iw} \;=\; q_x^i \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(h,t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w $$

sowie ${}_kp_x^i$ gemäß Gl. (1.13), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11) und ${}^{(h,t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (1.44)

(vgl. [2], Abschnitt 12, auch Gl. (1.1), (1.26) und (1.30)).

1.3.13 $^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aw}$ bzw. $^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_{xy}^{aw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente (gleichgültig ob bei Tod als Aktiver, Invalidenrentner oder Altersrentner) mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Erreichen des Versorgungsfalls (Invalidität, Tod als Aktiver oder Erreichen der Altersgrenze), vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}^{(t)}\tilde{L}_{x+k}^{aw}\,, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}\tilde{L}_x^{aw} \;=\; {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aaw} + {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aAw} + {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aiw}\,, \qquad x \leq z$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), $^{(t)}\tilde{L}_x^{aaw}$ gemäß Gl. (1.37), $^{(t)}\tilde{L}_x^{aAw}$ gemäß Gl. (1.41) und $^{(t)}\tilde{L}_x^{aiw}$ gemäß Gl. (1.43).

Individualmethode:

$$^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{xy}^{aw} \;=\; \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_kp_x^a \;{}_kp_y^b \;{}^{(t)}\tilde{L}_{x+k,y+k}^{aw}\,, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aw} \;=\; {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aaw} + {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aAw} + {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aiw}\,, \qquad x \leq z$$

sowie n gemäß Gl. (1.17), ${}_kp_x^a$ gemäß Gl. (1.16), ${}_kp_y^b$ gemäß Gl. (1.11), $^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aaw}$ gemäß Gl. (1.40), $^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aAw}$ gemäß Gl. (1.42) und $^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aiw}$ gemäß Gl. (1.45).

Kapitel 2

Die Barwerte der betrieblichen Altersversorgung nach dem Modell der „Richttafeln 1998“ auf der Basis von Kommutationszahlen

2.1 Vorbemerkungen

Im folgenden seien die üblichen Barwerte der betrieblichen Altersversorgung für eine Jahresrente vom Betrag 1 aufgelistet, und zwar sowohl für den Aktivenbestand als auch für den hieraus resultierenden Invaliden-, Gesamt-, Rentner- und Witwenbestand. Diese Barwerte werden in einer Form dargestellt, die unmittelbar für einen beliebigen Rentenvektor

$$R_u \quad \text{für} \quad u = x, x+1, \ldots$$

erweiterbar und damit besonders computergerecht ist: lautet die Formel für eine Jahresrente vom Betrag 1

$$\frac{N_x^L}{D_x} \;=\; \frac{1}{D_x} \sum_{u \geq x} D_u^L\,,$$

dann gewinnt man die Formel für den Barwert auf der Basis des Rentenvektors gemäß

$$\frac{1}{D_x} \sum_{u \geq x} R_u \; D_u^L\,.$$

Im folgenden seien der einfacheren Darstellung wegen gesetzt (z: Schlußalter für Aktive/Invalide, vgl. [1], S. 18):

$$q_x^g = q_x^r \quad \text{für} \quad x \geq z \quad \text{und} \quad q_x^i = q_x^r \quad \text{für} \quad x \geq z\,. \tag{2.1}$$

Des weiteren gilt für beliebige einfache Ordnungen (vgl. [2], Gl. (1))

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{2}}p_x &= 1 - \frac{1}{2} q_x\,, && (2.2)\\ {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{1-q_x}{1-\frac{1}{2}q_x}\,, && (2.3) \end{aligned}$$

sodaß die Gleichung ${}_{\frac{1}{2}}p_x\,{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = p_x$ erfüllt ist. Analog für ${}_{\frac{1}{2}}q_x = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_x$ und ${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}$.

2.2 Kommutationswerte

$$D_x^r = v^x\, l_x^r\,, \qquad x \geq z \qquad \text{(diskontierte Zahl der Altersrentner)}$$

$$D_x^g = v^x\, l_x^g = \begin{cases} v^x\, l_x^g & \text{für} \quad x \leq z \\ \dfrac{D_z^g}{D_z^r}\, D_x^r & \text{für} \quad x \geq z \end{cases} \qquad \text{(diskontierte Zahl der Personen des Gesamtbestands)}$$

$$D_y^w = v^y\, l_y^w \qquad \text{(diskontierte Zahl der Witwen)}$$

$$D_x^a = v^x\, l_x^a\,, \qquad x \leq z \qquad \text{(diskontierte Zahl der Aktiven)}$$

$$D_x^i = v^x\, l_x^i = \begin{cases} v^x\, l_x^i & \text{für} \quad x \leq z \\ \dfrac{D_z^i}{D_z^r}\, D_x^r & \text{für} \quad x \geq z \end{cases} \qquad \text{(diskontierte Zahl der Invalidenrentn}$$

$$
\begin{aligned}
D^r_{xy} &= v^x\, l^r_x\, l^b_y\,, \qquad x \geq z \\[2ex]
D^g_{xy} &= v^x\, l^g_x\, l^b_y = \begin{cases} v^x\, l^g_x\, l^b_y & \text{für} \quad x \leq z \\[1ex] \dfrac{D^g_{z,y+n}}{D^r_{z,y+n}}\, D^r_{xy} & \text{für} \quad x \geq z\,, \qquad n = z - x \end{cases} \\[2ex]
D^a_{xy} &= v^x\, l^a_x\, l^b_y\,, \qquad x \leq z \\[2ex]
D^i_{xy} &= v^x\, l^i_x\, l^b_y = \begin{cases} v^x\, l^i_x\, l^b_y & \text{für} \quad x \leq z \\[1ex] \dfrac{D^i_{z,y+n}}{D^r_{z,y+n}}\, D^r_{xy} & \text{für} \quad x \geq z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dabei kennzeichnet der Index „b“ einen geeigneten Bestand der zweiten Person des Paares.

$$
\begin{aligned}
N^r_x &= \sum_{u \geq x} D^r_u \\
N^w_y &= \sum_{u \geq y} D^w_u \\
N^g_x &= \sum_{u \geq x} D^g_u \\
N^i_x &= \sum_{u \geq x} D^i_u \\
N^a_x &= \begin{cases} \sum\limits_{u=x}^{z-1} D^a_u & \text{für} \quad x < z \\[1ex] 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Im Interesse einer einheitlichen Schreibweise werden D^g_x und D^i_x für alle x definiert, im Gegensatz zu den RT98, in denen D^g_x und D^i_x lediglich für $x \leq z$ definiert sind, so daß damit die N^g_x und N^i_x der RT98 einen anderen Wert als hier haben.

Brückenschlag zur Summendarstellung:

$$v^k\,{}_kp_x^r = \frac{D_{x+k}^r}{D_x^r}, \qquad x \geq z,\ k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_x^g = \frac{D_{x+k}^g}{D_x^g}, \qquad x, k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_y^w = \frac{D_{y+k}^w}{D_y^w}, \qquad y, k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_x^i = \frac{D_{x+k}^i}{D_x^i}, \qquad x, k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_x^a = \frac{D_{x+k}^a}{D_x^a}, \qquad x \leq z,\ k \leq z-x$$

$$v^k\,{}_kp_x^r\,{}_kp_y^b = \frac{D_{x+k,y+k}^r}{D_{xy}^r}, \qquad x \geq z,\ y, k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_x^g\,{}_kp_y^b = \frac{D_{x+k,y+k}^g}{D_{xy}^g}, \qquad x, y, k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_x^i\,{}_kp_y^b = \frac{D_{x+k,y+k}^i}{D_{xy}^i}, \qquad x, y, k \in \mathbb{N}_0$$

$$v^k\,{}_kp_x^a\,{}_kp_y^b = \frac{D_{x+k,y+k}^a}{D_{xy}^a}, \qquad x \leq z,\ k \leq z-x$$

2.3 Jährlich gleichbleibende Renten

2.3.1 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^r$

Barwert des Anspruchs eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^r = \frac{^{(t)}N_x^r}{D_x^r} = \mathrm{a}_x^r - k^{(t)}, \qquad x \geq z \tag{2.4}$$

mit

$$^{(t)}N^r_x \;=\; N^r_x - k^{(t)}\, D^r_x \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D^r_u\,, \qquad x \geq z$$

und

$$^{(t)}D^r_x \;=\; D^r_x\, {}^{(t)}L^r_x \;=\; D^r_x \;-\; k^{(t)}\,(D^r_x - D^r_{x+1})\;, \qquad x \geq z$$

sowie

$$k^{(t)} \;=\; \frac{1+i}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t+\lambda i} \tag{2.5}$$

(vgl. [2], Abschnitt 4).

2.3.2 $^{(t)}\mathbf{a}^w_y$

Barwert des Anspruchs einer Witwe des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}^w_y \;=\; \frac{^{(t)}N^w_y}{D^w_y} \;=\; \mathrm{a}^w_y \;-\; k^{(t)} \tag{2.6}$$

mit

$$^{(t)}N^w_y \;=\; N^w_y - k^{(t)}\, D^w_y \;=\; \sum_{u \geq y} {}^{(t)}D^w_u$$

und

$$^{(t)}D^w_y \;=\; D^w_y\, {}^{(t)}L^w_y \;=\; D^w_y \;-\; k^{(t)}\left(D^w_y - D^w_{y+1}\right)$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5)

(vgl. [2], Abschnitt 4).

2.3.3 $^{(t)}\mathbf{a}^g_x$

Barwert des Anspruchs einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}^g_x \;=\; \frac{^{(t)}N^g_x}{D^g_x} \;=\; \mathrm{a}^g_x \;-\; k^{(t)}$$

mit

$$ {}^{(t)}N_x^g \;=\; N_x^g - k^{(t)}\, D_x^g \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D_u^g $$

und

$$ {}^{(t)}D_x^g \;=\; D_x^g\, {}^{(t)}L_x^g \;=\; D_x^g \;-\; k^{(t)} \left(D_x^g - D_{x+1}^g \right) $$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5)

(vgl. [2], Abschnitt 4, auch Gl. (2.1)).

2.3.4 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{rw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{rw}$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{rw} \;=\; \frac{{}^{(t)}N_x^{rw}}{D_x^r} \;=\; \mathrm{a}_x^{rw}\,, \qquad x \geq z \tag{2.7} $$

mit

$$ {}^{(t)}N_x^{rw} \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D_u^{rw}\,, \qquad x \geq z $$

sowie

$$ \begin{aligned} {}^{(t)}D_x^{rw} \;&=\; D_x^r\, {}^{(t)}L_x^{rw} \;=\; D_x^r\; q_x^r\; h_x\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w\,, \qquad x \geq z\,, \\ {}^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w \;&=\; v^{\frac{1}{2}}\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w\; \mathrm{a}_{y+1}^w\,, \end{aligned} \tag{2.8} $$

${}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (2.3) und a_y^w gemäß Gl. (2.6).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{rw} \;=\; \frac{{}^{(t)}N_{xy}^{rw}}{D_{xy}^r} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{rw}\,, \qquad x \geq z \tag{2.9} $$

mit

$$ {}^{(t)}N_{xy}^{rw} \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D_{u,y-x+u}^{rw}\,, \qquad x \geq z $$

sowie

$$^{(t)}D^{rw}_{xy} \;=\; D^{r}_{xy}\,{}^{(t)}L^{rw}_{xy} \;=\; D^{r}_{xy}\; q^{r}_{x}\; {}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y}\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}}\,, \qquad x \geq z\,,$$

${}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y}$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8).

Dabei verweist der Index „b“ auf einen geeigneten Bestand der zweiten Person des Paares

(vgl. [2], Abschnitt 6).

2.3.5 ${}^{(t)}\mathbf{a}^{gw}_{x}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}^{gw}_{xy}$

Barwert der Anwartschaft einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\mathrm{a}^{gw}_{x} \;=\; \frac{^{(t)}N^{gw}_{x}}{D^{g}_{x}} \;=\; \mathrm{a}^{gw}_{x}$$

mit

$$^{(t)}N^{gw}_{x} \;=\; \sum_{u\,\geq\,x} {}^{(t)}D^{gw}_{u}$$

sowie

$$^{(t)}D^{gw}_{x} \;=\; D^{g}_{x}\,{}^{(t)}L^{gw}_{x} \;=\; D^{g}_{x}\; q^{g}_{x}\; h_{x}\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y(x)+\frac{1}{2}}$$

und ${}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8).

Individualmethode:

$$^{(t)}\mathrm{a}^{gw}_{xy} \;=\; \frac{^{(t)}N^{gw}_{xy}}{D^{g}_{xy}} \;=\; \mathrm{a}^{gw}_{xy}$$

mit

$$^{(t)}N^{gw}_{xy} \;=\; \sum_{u\,\geq\,x} {}^{(t)}D^{gw}_{u,y-x+u}$$

sowie

$$^{(t)}D^{gw}_{xy} \;=\; D^{g}_{xy}\,{}^{(t)}L^{gw}_{xy} \;=\; D^{g}_{xy}\; q^{g}_{x}\; {}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y}\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}}\,,$$

${}_{\frac{1}{2}}p_y^b$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(t)}\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (2.8)

(vgl. [2], Abschnitt 6, auch Gl. (2.1)).

2.3.6 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^i$

Barwert des Anspruchs eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_x^i \;=\; \frac{{}^{(t)}N_x^i}{D_x^i} \;=\; \mathrm{a}_x^i \,-\, k^{(t)} \tag{2.10} $$

mit

$$ {}^{(t)}N_x^i \;=\; N_x^i \,-\, k^{(t)}\, D_x^i \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D_u^i $$

und

$$ {}^{(t)}D_x^i \;=\; D_x^i\, {}^{(t)}L_x^i \;=\; D_x^i \;-\; k^{(t)} \left(D_x^i - D_{x+1}^i\right) $$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5)

(vgl. [2], Abschnitt 4, auch Gl. (2.1)).

2.3.7 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{iw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{iw}$

Barwert der Anwartschaft eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{iw} \;=\; \frac{{}^{(t)}N_x^{iw}}{D_x^i} \;=\; \mathrm{a}_x^{iw} \tag{2.11} $$

mit

$$ {}^{(t)}N_x^{iw} \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D_u^{iw} $$

sowie

$$ {}^{(t)}D_x^{iw} \;=\; D_x^i\, {}^{(t)}L_x^{iw} \;=\; D_x^i\; q_x^i\;\; h_x\;\; v^{\frac{1}{2}}\;\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w $$

und ${}^{(t)}a^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8).

Individualmethode:

$$
{}^{(t)}a^{iw}_{xy} \;=\; \frac{{}^{(t)}N^{iw}_{xy}}{D^i_{xy}} \;=\; a^{iw}_{xy} \tag{2.12}
$$

mit

$$
{}^{(t)}N^{iw}_{xy} \;=\; \sum_{u \geq x} {}^{(t)}D^{iw}_{u,y-x+u}
$$

sowie

$$
{}^{(t)}D^{iw}_{xy} \;=\; D^i_{xy}\,{}^{(t)}L^{iw}_{xy} \;=\; D^i_{xy}\; q^i_x\; {}_{\frac{1}{2}}p^b_y\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}a^w_{y+\frac{1}{2}}\,,
$$

${}_{\frac{1}{2}}p^b_y$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(t)}a^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8)

(vgl. [2], Abschnitt 6, auch Gl. (2.1)).

2.3.8 ${}^{(t)}\mathbf{a}^a_x$

Barwert des Anspruchs eines Aktiven des Alters x auf eine über die Aktivenzeit laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. (Aktivenrentenbarwert):

$$
{}^{(t)}a^a_x \;=\; \frac{{}^{(t)}N^a_x}{D^a_x} \;=\; a^a_x \;-\; k^{(t)}\left(1 - \frac{D^a_z}{D^a_x}\right)\,, \qquad x \leq z
$$

mit

$$
{}^{(t)}N^a_x \;=\; N^a_x \;-\; k^{(t)}\,(D^a_x \;-\; D^a_z) \;=\; \begin{cases} \sum\limits_{u=x}^{z-1} {}^{(t)}D^a_u & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}
$$

und

$$
{}^{(t)}D^a_x \;=\; D^a_x\,{}^{(t)}L^a_x \;=\; D^a_x \;-\; k^{(t)}\,(D^a_x - D^a_{x+1})\,, \qquad x < z
$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5).

2.3.9 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{aA}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Altersrente vom Jahresbetrag 1 ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{aA} \;=\; \frac{D_z^a}{D_x^a}\,^{(t)}\mathrm{a}_z^r\,, \qquad x \le z$$

mit $^{(t)}\mathrm{a}_z^r$ gemäß Gl. (2.4).

2.3.10 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{ai}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai} \;=\; \frac{^{(t)}N_x^{ai}}{D_x^a} \;=\; \mathrm{a}_x^{ai}\,, \qquad x \le z$$

mit

$$^{(t)}N_x^{ai} \;=\; \sum_{u=x}^{z} \,^{(t)}D_u^{ai}\,, \qquad x \le z \tag{2.13}$$

sowie

$$^{(t)}D_x^{ai} \;=\; D_x^a\,^{(t)}L_x^{ai} \;=\; \begin{cases} D_x^a \;\, i_x \;\, v^{\frac{1}{2}} \;\, ^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^i & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,,$$

$$^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^i \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;\, _{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \;\, \mathrm{a}_{x+1}^i\,, \tag{2.14}$$

$_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i$ gemäß Gl. (2.3) und a_x^i gemäß Gl. (2.10)

(vgl. [2], Abschnitt 5).

2.3.11 $^{(t)}\mathbf{a}_x^{aiA}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Alters- und Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$^{(t)}\mathrm{a}_x^{aiA} \;=\; \frac{^{(t)}N_x^{aiA}}{D_x^a} \;=\; ^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai} + \,^{(t)}\mathrm{a}_x^{aA}\,, \qquad x \le z$$

mit

$$ {}^{(t)}N_x^{aiA} \;=\; {}^{(t)}N_x^{ai} + D_z^a\,{}^{(t)}\mathrm{a}_z^r\,, \qquad x \le z $$

sowie ${}^{(t)}N_x^{ai}$ gemäß Gl. (2.13) und ${}^{(t)}\mathrm{a}_z^r$ gemäß Gl. (2.4).

2.3.12 ${}^{(t)}\breve{\mathbf{a}}_x^{aaw}$ bzw. ${}^{(t)}\breve{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\breve{\mathrm{a}}_x^{aaw} \;=\; \frac{{}^{(t)}\breve{N}_x^{aaw}}{D_x^a} \;=\; \breve{\mathrm{a}}_x^{aaw}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}\breve{N}_x^{aaw} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}\breve{D}_u^{aaw}\,, \qquad x \le z $$

sowie

$$ {}^{(t)}\breve{D}_x^{aaw} \;=\; D_x^a\,{}^{(t)}\breve{L}_x^{aaw} \;=\; \begin{cases} D_x^a\;\, q_x^{aa}\;\, h_x\;\, v^{\frac{1}{2}}\;\, {}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y(x)+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} $$

und ${}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\breve{\mathrm{a}}_{xy}^{aaw} \;=\; \frac{{}^{(t)}\breve{N}_{xy}^{aaw}}{D_{xy}^a} \;=\; \breve{\mathrm{a}}_{xy}^{aaw}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}\breve{N}_{xy}^{aaw} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}\breve{D}_{u,y-x+u}^{aaw}\,, \qquad x \le z $$

sowie

$$ {}^{(t)}\breve{D}_{xy}^{aaw} \;=\; D_{xy}^a\,{}^{(t)}\breve{L}_{xy}^{aaw} \;=\; \begin{cases} D_{xy}^a\;\, q_x^{aa}\;\, {}_{\frac{1}{2}}p_y^b\;\, v^{\frac{1}{2}}\;\, {}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, $$

${}_{\frac{1}{2}}p_y^b$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8)

(vgl. [2], Abschnitt 6).

2.3.13 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aAw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aAw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{aAw} \;=\; \frac{D_z^a}{D_x^a}\,{}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw} \;=\; \mathrm{a}_x^{aAw}\,, \qquad x \le z $$

mit ${}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw}$ gemäß Gl. (2.7).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aAw} \;=\; \frac{D_{z,y+n}^a}{D_{xy}^a}\,{}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{aAw}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ n \;=\; z \;-\; x \qquad \text{mit} \qquad z = \text{Schlußalter für Aktive/Invalide} \tag{2.15} $$

und ${}^{(t)}\mathrm{a}_{z,y+n}^{rw}$ gemäß Gl. (2.9).

2.3.14 ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aaw}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver bzw. nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{aaw} \;=\; \frac{{}^{(t)}N_x^{aaw}}{D_x^a} \;=\; \mathrm{a}_x^{aaw}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}N_x^{aaw} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}D_u^{aaw}\,, \qquad x \le z\,, \tag{2.16} $$

$$ {}^{(t)}D_x^{aaw} \;=\; D_x^a\,{}^{(t)}L_x^{aaw} \;=\; \begin{cases} D_x^a\;q_x^{aa}\;h_x\;v^{\frac{1}{2}}\;{}^{(t)}\mathrm{a}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w} & \text{für} \quad x < z \\ D_z^a\;{}^{(t)}\mathrm{a}_z^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} $$

sowie ${}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8) und ${}^{(t)}\mathrm{a}^{rw}_{z}$ gemäß Gl. (2.7).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{aaw}_{xy} \;=\; \frac{{}^{(t)}N^{aaw}_{xy}}{D^{a}_{xy}} \;=\; \mathrm{a}^{aaw}_{xy}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}N^{aaw}_{xy} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}D^{aaw}_{u,y-x+u}\,, \qquad x \le z\,, \tag{2.17} $$

$$ {}^{(t)}D^{aaw}_{xy} \;=\; D^{a}_{xy}\,{}^{(t)}L^{aaw}_{xy} \;=\; \begin{cases} D^{a}_{xy}\;\, q^{aa}_{x}\;\, {}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y}\;\, v^{\frac{1}{2}}\;\, {}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}} & \text{für}\quad x < z \\ D^{a}_{z,y+n}\;\, {}^{(t)}\mathrm{a}^{rw}_{z,y+n} & \text{für}\quad x = z \end{cases} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y}$ gemäß Gl. (2.2), ${}^{(t)}\mathrm{a}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.8), n gemäß Gl. (2.15) und ${}^{(t)}\mathrm{a}^{rw}_{z,y+n}$ gemäß Gl. (2.9)

(vgl. [2], Abschnitt 6).

2.3.15 ${}^{(t)}\mathbf{a}^{aiw}_{x}$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}^{aiw}_{xy}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Invalider, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{aiw}_{x} \;=\; \frac{{}^{(t)}N^{aiw}_{x}}{D^{a}_{x}} \;=\; \mathrm{a}^{aiw}_{x}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}N^{aiw}_{x} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}D^{aiw}_{u}\,, \qquad x \le z\,, \tag{2.18} $$

$$ {}^{(t)}D^{aiw}_{x} \;=\; D^{a}_{x}\,{}^{(t)}L^{aiw}_{x} \;=\; \begin{cases} D^{a}_{x}\;\, i_{x}\;\, v^{\frac{1}{2}}\;\, {}^{(t)}\mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2}} & \text{für}\quad x < z \\ 0 & \text{für}\quad x = z \end{cases}\,, $$

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2}} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \left[\; {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}\;\, \mathrm{a}^{iw}_{x+1} \;+\; {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+\frac{1}{2}}\;\, h_{x}\;\, {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x)+\frac{1}{2}}\;\, \mathrm{a}^{w}_{y(x)+1} \right] \tag{2.19} $$

sowie

$$ {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\frac{1}{2}q^i_x}{1-\frac{1}{2}q^i_x}\,, \tag{2.20}$$

${}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}$, ${}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.3), a^{iw}_x gemäß Gl. (2.11) und a^w_y gemäß Gl. (2.6).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{aiw}_{xy} \;=\; \frac{{}^{(t)}N^{aiw}_{xy}}{D^a_{xy}} \;=\; \mathrm{a}^{aiw}_{xy}\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}N^{aiw}_{xy} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}D^{aiw}_{u,y-x+u}\,, \qquad x \le z\,, \tag{2.21}$$

$$ {}^{(t)}D^{aiw}_{xy} \;=\; D^a_{xy}\;{}^{(t)}L^{aiw}_{xy} \;=\; \begin{cases} D^a_{xy}\;\; i_x\;\; {}_{\frac{1}{2}}p^b_y\;\; v^{\frac{1}{2}}\;\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, $$

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}} \;=\; v^{\frac{1}{2}}\left[\; {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}\;\; {}_{\frac{1}{2}}p^b_{y+\frac{1}{2}}\;\; \mathrm{a}^{iw}_{x+1,y+1} \;+\; {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}\;\; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}}\;\; \mathrm{a}^w_{y+1}\right] \tag{2.22}$$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p^b_y$ gemäß Gl. (2.2), ${}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}$, ${}_{\frac{1}{2}}p^b_{y+\frac{1}{2}}$, ${}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.3), ${}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.20), a^{iw}_{xy} gemäß Gl. (2.12) und a^w_y gemäß Gl. (2.6)

(vgl. [2], Abschnitt 7).

2.3.16 ${}^{(t)}\mathbf{a}^{aw}_x$ bzw. ${}^{(t)}\mathbf{a}^{aw}_{xy}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 (gleichgültig ob bei Tod als Aktiver, Invalidenrentner oder Altersrentner), vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{aw}_x \;=\; \frac{{}^{(t)}N^{aw}_x}{D^a_x} \;=\; {}^{(t)}\mathrm{a}^{aaw}_x + {}^{(t)}\mathrm{a}^{aiw}_x \;=\; \mathrm{a}^{aw}_x\,, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}N^{aw}_x \;=\; {}^{(t)}N^{aaw}_x + {}^{(t)}N^{aiw}_x\,, \qquad x \le z $$

sowie ${}^{(t)}N_x^{aaw}$ gemäß Gl. (2.16) und ${}^{(t)}N_x^{aiw}$ gemäß Gl. (2.18).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aw} \;=\; \frac{{}^{(t)}N_{xy}^{aw}}{D_{xy}^{a}} \;=\; {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aaw} + {}^{(t)}\mathrm{a}_{xy}^{aiw} \;=\; \mathrm{a}_{xy}^{aw}\,, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}N_{xy}^{aw} \;=\; {}^{(t)}N_{xy}^{aaw} + {}^{(t)}N_{xy}^{aiw}\,, \qquad x \leq z $$

sowie ${}^{(t)}N_{xy}^{aaw}$ gemäß Gl. (2.17) und ${}^{(t)}N_{xy}^{aiw}$ gemäß Gl. (2.21).

2.4 Renten mit Rentendynamik

2.4.1 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^r$

Barwert des Anspruchs eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^r \;=\; \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_x^r}{D_x^r}\,, \qquad x \geq z \tag{2.23} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_x^r \;=\; \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\;{}^{(t)}D_{x+k}^r\,, \qquad x \geq z\,, $$

$$ {}^{(t)}D_x^r \;=\; D_x^r\,{}^{(t)}L_x^r \;=\; D_x^r \;-\; k^{(t)}\left(D_x^r - D_{x+1}^r\right)\,, \qquad x \geq z $$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5); zudem sei für beliebiges $c \in \mathbb{R}$:

$$ [c] \in \mathbb{Z}:\;\; \text{größte ganze Zahl mit } [c] \leq c \tag{2.24} $$

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3).

2.4.2 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_y^w$

Barwert des Anspruchs einer Witwe des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w = \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_y^w}{D_y^w} \tag{2.25} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_y^w = \sum_{k \geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; {}^{(t)}D_{y+k}^w $$

und

$$ {}^{(t)}D_y^w = D_y^w \, {}^{(t)}L_y^w = D_y^w - k^{(t)} \left(D_y^w - D_{y+1}^w\right) $$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5)

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch (2.24)).

2.4.3 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^g$

Barwert des Anspruchs einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^g = \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_x^g}{D_x^g} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_x^g = \sum_{k \geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; {}^{(t)}D_{x+k}^g $$

und

$$ {}^{(t)}D_x^g = D_x^g \, {}^{(t)}L_x^g = D_x^g - k^{(t)} \left(D_x^g - D_{x+1}^g\right) $$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5)

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch Gl. (2.1) und (2.24)).

2.4.4 $\quad {}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{rw}$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_{xy}^{rw}$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_x^{rw} = \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_x^{rw}}{D_x^r}, \qquad x \geq z \tag{2.26} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_x^{rw} = \sum_{k \geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; {}^{(\langle\frac{h+k}{m}\rangle,t)}\hat{D}_{x+k}^{rw}, \qquad x \geq z $$

und

$$ {}^{(h,t)}\hat{D}_x^{rw} = D_x^r \; {}^{(h,t)}\hat{L}_x^{rw} = D_x^r \; q_x^r \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w, \qquad x \geq z, $$

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w = v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w \left(k^{(t)} + {}^{(h+1,t)}\hat{\text{a}}_{y+1}^w\right) \tag{2.27} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (2.3), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5) und ${}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_y^w$ gemäß Gl. (2.25); zudem sei für $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$:

$$ \left\langle \frac{k}{m} \right\rangle : \text{ ganzzahliger Rest der Division } \frac{k}{m} \tag{2.28} $$

(vgl. [2], Gl. (49)).

Individualmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_{xy}^{rw} = \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_{xy}^{rw}}{D_{xy}^r}, \qquad x \geq z \tag{2.29} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_{xy}^{rw} = \sum_{k \geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; {}^{(\langle\frac{h+k}{m}\rangle,t)}\hat{D}_{x+k,y+k}^{rw}, \qquad x \geq z $$

sowie

$$ {}^{(h,t)}\hat{D}_{xy}^{rw} = D_{xy}^r \; {}^{(h,t)}\hat{L}_{xy}^{rw} = D_{xy}^r \; q_x^r \; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w, \qquad x \geq z, $$

${}_{\frac{1}{2}}p_y^b$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w$ gemäß Gl. (2.27)

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch (2.24)).

2.4.5 $\,^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{gw}$ bzw. $\,^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_{xy}^{gw}$

Barwert der Anwartschaft einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

Kollektivmethode:

$$^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^{gw} \;=\; \frac{^{(h,t)}\hat{N}_x^{gw}}{D_x^g}$$

mit

$$^{(h,t)}\hat{N}_x^{gw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} \; s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; ^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{D}_{x+k}^{gw}$$

sowie

$$^{(h,t)}\hat{D}_x^{gw} \;=\; D_x^g \; ^{(h,t)}\hat{L}_x^{gw} \;=\; D_x^g \; q_x^g \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \; ^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w}$$

und $^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (2.27).

Individualmethode:

$$^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{xy}^{gw} \;=\; \frac{^{(h,t)}\hat{N}_{xy}^{gw}}{D_{xy}^g}$$

mit

$$^{(h,t)}\hat{N}_{xy}^{gw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} \; s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; ^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{D}_{x+k,y+k}^{gw}$$

sowie

$$^{(h,t)}\hat{D}_{xy}^{gw} \;=\; D_{xy}^g \; ^{(h,t)}\hat{L}_{xy}^{gw} \;=\; D_{xy}^g \; q_x^g \; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \; v^{\frac{1}{2}} \; ^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}\,,$$

${}_{\frac{1}{2}}p_y^b$ gemäß Gl. (2.2) und $^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (2.27)

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch Gl. (2.1), (2.24) und (2.28)).

2.4.6 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^i$

Barwert des Anspruchs eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^i \;=\; \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_x^i}{D_x^i} \tag{2.30} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_x^i \;=\; \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\ {}^{(t)}D_{x+k}^i $$

und

$$ {}^{(t)}D_x^i \;=\; D_x^i\ {}^{(t)}L_x^i \;=\; D_x^i \;-\; k^{(t)}\left(D_x^i - D_{x+1}^i\right) $$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5)

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch Gl. (2.1) und (2.24)).

2.4.7 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{iw}$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_{xy}^{iw}$

Barwert der Anwartschaft eines Invalidenrentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^{iw} \;=\; \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}_x^{iw}}{D_x^i} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}_x^{iw} \;=\; \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\ {}^{\left(\left\langle\frac{h+k}{m}\right\rangle,t\right)}\hat{D}_{x+k}^{iw} $$

sowie

$$ {}^{(h,t)}\hat{D}_x^{iw} \;=\; D_x^i\ {}^{(h,t)}\hat{L}_x^{iw} \;=\; D_x^i\ q_x^i\ h_x\ v^{\frac{1}{2}}\ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^w $$

und ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.27).

Individualmethode:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}^{iw}_{xy} = \frac{{}^{(h,t)}\hat{N}^{iw}_{xy}}{D^{i}_{xy}} $$

mit

$$ {}^{(h,t)}\hat{N}^{iw}_{xy} = \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \; {}^{(\langle\frac{h+k}{m}\rangle,t)}\hat{D}^{iw}_{x+k,y+k} $$

sowie

$$ {}^{(h,t)}\hat{D}^{iw}_{xy} = D^{i}_{xy} \; {}^{(h,t)}\hat{L}^{iw}_{xy} = D^{i}_{xy} \; q^{i}_{x} \; {}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y} \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}}\,, $$

${}_{\frac{1}{2}}p^{b}_{y}$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.27).

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch Gl. (2.1), (2.24) und (2.28)).

2.4.8 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}^{ai}_{x}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^{ai}_{x} = \frac{{}^{(t)}\tilde{N}^{ai}_{x}}{D^{a}_{x}}\,, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}^{ai}_{x} = \sum_{u\,=\,x}^{z} {}^{(t)}\tilde{D}^{ai}_{u}\,, \qquad x \leq z \tag{2.31} $$

sowie

$$ {}^{(t)}\tilde{D}^{ai}_{x} = D^{a}_{x} \, {}^{(t)}\tilde{L}^{ai}_{x} = \begin{cases} D^{a}_{x} \; i_{x} \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^{i}_{x+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, $$

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^{i}_{x+\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}} \left(k^{(t)} + {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}^{i}_{x+1} + \sigma \; {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}^{i}_{x+1} \right)\,, \tag{2.32} $$

$$ {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}^{i}_{x} = \frac{1}{D^{i}_{x}} \sum_{k\,\in\,J} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left[\frac{t-1}{2t} D^{i}_{x+k} - \kappa^{(t)} \left(D^{i}_{x+k} - D^{i}_{x+k+1} \right) \right] \tag{2.33} $$

mit

$$J = \{m-1,\, 2m-1,\, \ldots\} \tag{2.34}$$

und

$$\kappa^{(t)} = \frac{1+i}{t^2} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda^2}{t+\lambda i} \tag{2.35}$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5) und ${}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^i$ gemäß Gl. (2.30)

(vgl. [2], Abschnitt 11, auch (2.24)).

2.4.9 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aiA}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Alters- und Invalidenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität bzw. ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aiA} = \frac{{}^{(t)}\tilde{N}_x^{aiA}}{D_x^a}, \qquad x \le z$$

mit

$${}^{(t)}\tilde{N}_x^{aiA} = {}^{(t)}\tilde{N}_x^{ai} + D_z^a\, {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_z^r, \qquad x \le z$$

sowie ${}^{(t)}\tilde{N}_x^{ai}$ gemäß Gl. (2.31) und ${}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_z^r$ gemäß Gl. (2.23).

2.4.10 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aaw}$ bzw. ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod als Aktiver mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt des Todes, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aaw} = \frac{{}^{(t)}\tilde{N}_x^{aaw}}{D_x^a}, \qquad x \le z$$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}_x^{aaw} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}\tilde{D}_u^{aaw}\,, \qquad x \leq z \tag{2.36} $$

sowie

$$ {}^{(t)}\tilde{D}_x^{aaw} \;=\; D_x^a \, {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aaw} \;=\; \begin{cases} D_x^a \;\; q_x^{aa} \;\; h_x \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^w_{y(x)+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, $$

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^w_{y+\frac{1}{2}} \;=\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}} \;\; \left(k^{(t)} \;+\; {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}^w_{y+1} \;+\; \sigma \;\, {}^{(t)}\Delta\mathrm{a}^w_{y+1}\right) \tag{2.37} $$

und

$$ {}^{(t)}\Delta\mathrm{a}_y^w \;=\; \frac{1}{D_y^w} \sum_{k\,\in\,J} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left[\frac{t-1}{2t}\, D^w_{y+k} \;-\; \kappa^{(t)} \left(D^w_{y+k} \;-\; D^w_{y+k+1}\right)\right] \tag{2.38} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.3), ${}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}^w_y$ gemäß Gl. (2.25), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5), $\kappa^{(t)}$ gemäß Gl. (2.35) und J gemäß Gl. (2.34).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{xy}^{aaw} \;=\; \frac{{}^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aaw}}{D_{xy}^a}\,, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aaw} \;=\; \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}\tilde{D}_{u,y-x+u}^{aaw}\,, \qquad x \leq z \tag{2.39} $$

sowie

$$ {}^{(t)}\tilde{D}_{xy}^{aaw} \;=\; D_{xy}^a \, {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aaw} \;=\; \begin{cases} D_{xy}^a \;\; q_x^{aa} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^b \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^w_{y+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}\,, $$

${}_{\frac{1}{2}}p_y^b$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.37)

(vgl. [2], Abschnitt 11, auch (2.24)).

2.4.11 $^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aAw}$ bzw. $^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_{xy}^{aAw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Erreichen der Altersgrenze, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aAw} = \frac{^{(t)}\tilde{N}_x^{aAw}}{D_x^a}, \qquad x \le z$$

mit

$$^{(t)}\tilde{N}_x^{aAw} = \sum_{u \ge x}^{z} {}^{(t)}\tilde{D}_u^{aAw}, \qquad x \le z \tag{2.40}$$

sowie

$$^{(t)}\tilde{D}_x^{aAw} = D_x^a \, {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aAw} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ D_z^a \; {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_z^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

und $^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_z^{rw}$ gemäß Gl. (2.26).

Individualmethode:

$$^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{xy}^{aAw} = \frac{^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aAw}}{D_{xy}^a}, \qquad x \le z$$

mit

$$^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aAw} = \sum_{k \ge 0} {}^{(t)}\tilde{D}_{x+k,y+k}^{aAw}, \qquad x \le z \tag{2.41}$$

sowie

$$^{(t)}\tilde{D}_{xy}^{aAw} = D_{xy}^a \, {}^{(t)}\tilde{L}_{xy}^{aAw} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ D_{z,y+n}^a \; {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_{z,y+n}^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases},$$

n gemäß Gl. (2.15) und $^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_{z,y+n}^{rw}$ gemäß Gl. (2.29).

2.4.12 ${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aiw}$ bzw. ${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{xy}^{aiw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod als Invalider mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aiw} = \frac{{}^{(t)}\tilde{N}_x^{aiw}}{D_x^a}, \qquad x \leq z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}_x^{aiw} = \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}\tilde{D}_u^{aiw}, \qquad x \leq z, \tag{2.42} $$

$$ {}^{(t)}\tilde{D}_x^{aiw} = D_x^a \, {}^{(t)}\tilde{L}_x^{aiw} = \begin{cases} D_x^a \; i_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}, $$

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} = v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} \; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+1}^{iw} + {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i} \; h_x \; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i}$ gemäß Gl. (2.3), ${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i}$ gemäß Gl. (2.20), ${}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w}$ gemäß Gl. (2.37) und

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{iw} = \frac{{}^{(t)}\hat{N}_x^{iw}}{D_x^i} $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}_x^{iw} = \sum_{k\geq 0} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \; {}^{(\langle\frac{k}{m}\rangle,t)}\tilde{D}_u^{iw}, $$

$$ {}^{(h,t)}\tilde{D}_x^{iw} = D_x^i \, {}^{(h,t)}\tilde{L}_x^{iw} = D_x^i \; q_x^i \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(h,t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w}, $$

$$ {}^{(h,t)}\tilde{\mathrm{a}}_{y+\frac{1}{2}}^{w} = v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^{w} \; \left(\tilde{k}^{(h,t)} + {}^{(h+1,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y+1}^{w} + \sigma \; {}^{(h+1,t)}\Delta \mathrm{a}_{y+1}^{w}\right), \tag{2.43} $$

$$ {}^{(h,t)}\Delta \mathrm{a}_y^{w} = \frac{1}{D_y^w} \sum_{k\in J} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]} \left[\frac{t-1}{2t} D_{y+k}^w - \kappa^{(t)} \left(D_{y+k}^w - D_{y+k+1}^w\right)\right], $$

$$ \tilde{k}^{(h,t)} = \begin{cases} k^{(t)} & \text{für} \quad h = 0, 1, \ldots, m-2 \\ k^{(t)} + \sigma\, \kappa^{(t)} & \text{für} \quad h = m-1 \end{cases} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.3), ${}^{(h,t)}\hat{\text{a}}^w_y$ gemäß Gl. (2.25), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (2.5), $\kappa^{(t)}$ gemäß Gl. (2.35) und J gemäß Gl. (2.34).

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}^{aiw}_{xy} = \frac{{}^{(t)}\tilde{N}^{aiw}_{xy}}{D^a_{xy}}, \qquad x \le z $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}^{aiw}_{xy} = \sum_{u=x}^{z} {}^{(t)}\tilde{D}^{aiw}_{x+k,y+k}, \qquad x \le z, \tag{2.44} $$

$$ {}^{(t)}\tilde{D}^{aiw}_{xy} = D^a_{xy}\, {}^{(t)}\tilde{L}^{aiw}_{xy} = \begin{cases} D^a_{xy}\; i_x\; {}_{\frac{1}{2}}p^b_y\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\tilde{\text{a}}^{iw}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}, $$

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}^{iw}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}}\; {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}\; {}_{\frac{1}{2}}p^b_{y+\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\tilde{\text{a}}^{iw}_{x+1,y+1} + {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\tilde{\text{a}}^{w}_{y+\frac{1}{2}} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p^b_y$ gemäß Gl. (2.2) ${}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}$, ${}_{\frac{1}{2}}p^b_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.3), ${}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.20), ${}^{(t)}\tilde{\text{a}}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.37) und

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}^{iw}_{xy} = \frac{{}^{(t)}\tilde{N}^{iw}_{xy}}{D^i_x} $$

mit

$$ {}^{(t)}\tilde{N}^{iw}_{xy} = \sum_{k \ge 0} s^{\left[\frac{k}{m}\right]}\; {}^{(\langle \frac{k}{m} \rangle, t)}\tilde{D}^{iw}_{x+k,y+k}, $$

$$ {}^{(h,t)}\tilde{D}^{iw}_{xy} = D^i_{xy}\, {}^{(h,t)}\tilde{L}^{iw}_{x} = D^i_{xy}\; q^i_x\; {}_{\frac{1}{2}}p^b_y\; v^{\frac{1}{2}}\; {}^{(h,t)}\tilde{\text{a}}^w_{y+\frac{1}{2}} $$

sowie ${}_{\frac{1}{2}}p^b_y$ gemäß Gl. (2.2) und ${}^{(h,t)}\tilde{\text{a}}^w_{y+\frac{1}{2}}$ gemäß Gl. (2.43)

(vgl. [2], Abschnitt 12, auch Gl. (2.1), (2.24) und (2.28)).

2.4.13 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}^{aw}_x$ bzw. ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}^{aw}_{xy}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente (gleichgültig ob bei Tod als Aktiver, Invalidenrentner oder Altersrentner) mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im *mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Erreichen des Versorgungsfalls (Invalidität, Tod als Aktiver oder Erreichen der Altersgrenze), vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:*

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\tilde{\text{a}}_x^{aw} = \frac{^{(t)}\tilde{N}_x^{aw}}{D_x^a}, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}\tilde{N}_x^{aw} = {}^{(t)}\tilde{N}_x^{aaw} + {}^{(t)}\tilde{N}_x^{aAw} + {}^{(t)}\tilde{N}_x^{aiw}, \qquad x \leq z$$

sowie $^{(t)}\tilde{N}_x^{aaw}$ gemäß Gl. (2.36), $^{(t)}\tilde{N}_x^{aAw}$ gemäß Gl. (2.40) und $^{(t)}\tilde{N}_x^{aiw}$ gemäß Gl. (2.42).

Individualmethode:

$$^{(t)}\tilde{\text{a}}_{xy}^{aw} = \frac{^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aw}}{D_{xy}^a}, \qquad x \leq z$$

mit

$$^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aw} = {}^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aaw} + {}^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aAw} + {}^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aiw}, \qquad x \leq z$$

sowie $^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aaw}$ gemäß Gl. (2.39), $^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aAw}$ gemäß Gl. (2.41) und $^{(t)}\tilde{N}_{xy}^{aiw}$ gemäß Gl. (2.44).

Kapitel 3

Die Barwerte der betrieblichen Altersversorgung nach dem Modell der „Richttafeln 1998“ auf verallgemeinerter Basis

3.1 Vorbemerkungen

Hier sollen die wichtigsten der in [2] auf der Basis des Konzepts der RT98 abgeleiteten Formeln verallgemeinert auf der Basis von Übergangswahrscheinlichkeiten eines Bestandssystems dargestellt werden, das aus einem Bestand von Aktiven eines vorgegebenen Anfangsalters (RT98: 20 Jahre) hervorgeht, indem für das vorzeitige Ausscheiden zwei Ausscheideursachen unterstellt werden: „Invalidität“ und „Tod als Aktiver“ . Zum Schlußalter für Aktive/Invalide z wechseln alle noch vorhandenen Aktive in den Altersrentnerbestand über, ebenfalls die Invaliden, die dieses Alter erreichen. Aktive und Invalide zusammen bilden bis zum Alter z einen Gesamtbestand, der selbst eine Einheit, den Gesamtbestand als Mischbestand von Aktiven und Invaliden mit der einzigen vorzeitigen Ausscheideursache „Tod“ darstellt, und der mit dem Alter z in den Altersrentnerbestand übergeht. Daneben gibt es den Witwen/Witwerbestand, das ist der Bestand der Ehegatten, deren Ehepartner verstorben sind, und in den ein Übergang aus den oben beschriebenen Beständen dadurch stattfindet, daß ein Berechtigter (Aktiver, Invalider, Rentner) bei Tod verheiratet ist und damit eine Witwe/Witwer hinterläßt. In diesem Bestand gibt es nur die Ausscheideursache „Tod“.

Die Steigerungsrate pro Steigerungsperiode sei mit σ, der Steigerungsfaktor mit s bezeichnet: $s = 1 + \sigma$.

3.2 Übergangswahrscheinlichkeiten

q_x^b Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands b mit Alter x, innerhalb eines Jahres zu sterben, $b \in \{ r, i, g, w \}$ (wie RT98)

q_x^{aa} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben (wie RT98)

i_x Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden (wie RT98)

p_x^{ai} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben (Näherung RT98: $i_x \, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}$)

q_x^{ai} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr - als Invalider - zu sterben (vgl. [2], Gl. (33); Näherung RT98: $i_x \, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$)

q_x^a Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben ($q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$; Näherung RT98: $q_x^{aa} + i_x \, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$)

p_x^{bw} Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands b mit Alter x, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht, $b \in \{ r, i, g \}$ (Näherung RT98: $q_x^b \, h_x \, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$)

p_x^{aaw} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres als Aktiver unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht (Näherung RT98: $q_x^{aa} \, h_x \, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$)

p_x^{aiw} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht (Näherung RT98: $i_x \, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} \, h_x \, {}_{\frac{1}{3}}p^w_{y(x)+\frac{2}{3}}$; Näherung gemäß [2]: $i_x \, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} \, h_x \, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$ (Beweis siehe 3.3))

p_x^{aw} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht ($p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}$).

3.3 Herleitung der Übergangswahrscheinlichkeit 2. Stufe ($\mathbf{p_x^{aiw}}$)

Offenbar gilt

$$p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}$$

sowie analog zu [2], Gl. (14) die Konsistenzbedingung[1] (sie ergibt sich aus dem Sachverhalt, daß der Gesamtbestand sich aus dem Aktiven- und dem Invalidenbestand zusammensetzt)

$$p_x^{gw} = \frac{l_x^a}{l_x^g}\, p_x^{aw} + \frac{l_x^I}{l_x^g}\, p_x^{iw}\,, \tag{3.1}$$

aus der sich p_x^{aiw} unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.2 angegebenen Näherungen der RT98 leicht ableiten läßt:

$$\begin{aligned}
l_x^a\, p_x^{aw} &= l_x^g\, p_x^{gw} - l_x^I\, p_x^{iw} \\
&= \underbrace{(l_x^g\, q_x^g - l_x^I\, q_x^i)}_{l_x^a\, q_x^a \quad \text{gemäß [2], Gl. (14)}}\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \quad p_x^{aw} &= q_x^a\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
p_x^{aiw} &= p_x^{aw} - p_x^{aaw} \\
&= (q_x^a - q_x^{aa})\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}} \\
&= q_x^{ai}\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}} \qquad \text{gemäß [2], Gl. (33),}
\end{aligned}$$

im Gegensatz zu den RT98, die hier $q_x^{ai}\, h_x\, {}_{\frac{1}{3}}p^w_{y(x)+\frac{2}{3}}$ setzen, wodurch die Konsistenzbedingung (3.1) verletzt wird (vgl. [2], insbesondere Gl. (44); wie dort ausgeführt, könnte die Konsistenzbedingung auch auf andere, doch kompliziertere Weise sichergestellt werden).

[1] nach einem Hinweis von Jensen; diese Beziehung wurde implizit in [2], Gl. (34) vorausgesetzt

3.4 Barwerte

Es werden der einfacheren Darstellung wegen $q_x^i := q_x^r$ und $q_x^g := q_x^r$ für $x \geq z$ gesetzt, sowie die Formeln für den allgemeinen Fall „mit Rentendynamik" gebracht; mit $\sigma = 0 \Leftrightarrow s = 1$ erhält man den Fall „ohne Rentendynamik".

3.4.1 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^r$, ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^w$, ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^i$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^g$

Barwert des Anspruchs eines Rentners, einer Witwe, eines Invalidenrentners bzw. einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Rente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^b \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^k \;\, {}_kp_x^b \;\left(1 - k^{(t)}\left(1 - v p_{x+k}^b\right)\right), \quad b \in \{\, r, w, i, g \,\} \tag{3.2}$$

mit

$$ k^{(t)} \;=\; \frac{1+i}{t} \sum_{\lambda\,=\,0}^{t\,-\,1} \frac{\lambda}{t + \lambda i}\,. \tag{3.3}$$

Zudem sei für beliebiges $c \in \mathbb{R}$:

$$ [c] \in \mathbb{Z} : \;\; \text{größte ganze Zahl mit } [c] \leq c \tag{3.4}$$

(vgl. [3], Abschnitt 2.8.3, auch Gl. (1.1)).

3.4.2 ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{rw}$, ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{iw}$ bzw. ${}^{(h,t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{gw}$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners, eines Invalidenrentners bzw. einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a., wobei die letzte Anpassung der Renten h Jahre, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, zurückliegt:

$$ {}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_x^{bw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\; v^{k+1} \;\, {}_kp_x^b \;\, p_{x+k}^{bw} \;\left(k^{(t)} \;+\; {}^{(\langle \frac{h+k}{m} \rangle + 1, t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x+k)+1}^w\right), \quad b \in \{\, r, i, g \,\}$$

mit $k^{(t)}$ gemäß Gl. (3.3) und ${}^{(h,t)}\hat{\text{a}}_y^w$ gemäß Gl. (3.2).

Zudem sei für $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\left\langle \frac{k}{m} \right\rangle : \text{ ganzzahliger Rest der Division } \frac{k}{m} \tag{3.5}$$

(vgl. [2], Abschnitt 8, auch Gl. (1.1) und (3.4)).

3.4.3 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{ai}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\tilde{\text{a}}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_k p_x^a \; p_{x+k}^{ai} \; \left(k^{(t)} + {}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_{x+k+1}^i + \sigma \, {}^{(t)}\Delta \text{a}_{x+k+1}^i \right) $$

mit

$$ {}^{(t)}\Delta \text{a}_x^i = \sum_{k \in J} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} v^k \, {}_k p_x^i \left[\frac{t-1}{2t} - \kappa^{(t)} \left(1 - v p_{x+k}^i \right) \right] , $$

$$ J = \{m-1, 2m-1, \ldots\} , \tag{3.6}$$

$$ \kappa^{(t)} = \frac{1+i}{t^2} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda^2}{t+\lambda i} \tag{3.7}$$

sowie $k^{(t)}$ gemäß Gl. (3.3) und ${}^{(0,t)}\hat{\text{a}}_x^i$ gemäß Gl. (3.2)

(vgl. [2], Abschnitt 11, auch (3.4)).

Bem.: Bei jährlicher Anpassung ($m = 1$) ist $J = \mathbb{N}_0$.

3.4.4 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aaw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod als Aktiver mit Steigerung des anfänglichen

Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt des Todes, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aaw} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_kp_x^a \; p_{x+k}^{aaw} \; \left(k^{(t)} + {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x+k)+1}^{w} + \sigma \; {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_{y(x+k)+1}^{w}\right) $$

mit

$$ {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_y^w = \sum_{k \in J} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} v^k \; {}_kp_y^w \left[\frac{t-1}{2t} - \kappa^{(t)} \left(1 - vp_{y+k}^w\right)\right] \tag{3.8} $$

sowie J gemäß Gl. (3.6), $\kappa^{(t)}$ gemäß Gl. (3.7), $k^{(t)}$ gemäß Gl. (3.3) und ${}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w$ gemäß Gl. (3.2)

(vgl. [2], Abschnitt 11, auch (3.4)).

Bem.: Bei jährlicher Anpassung ($m = 1$) ist $J = \mathbb{N}_0$.

3.4.5 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{gw}$

Barwert der Anwartschaft einer Person des Gesamtbestandes des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt des Todes, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{gw} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_kp_x^g \; p_{x+k}^{gw} \; \left(k^{(t)} + {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x+k)+1}^{w} + \sigma \; {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_{y(x+k)+1}^{w}\right) , $$

mit $k^{(t)}$ gemäß Gl. (3.3), ${}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w$ gemäß Gl. (3.2) und ${}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_y^w$ gemäß Gl. (3.8)

(vgl. [2], Abschnitt 11).

3.4.6 ${}^{(t)}\tilde{\mathbf{a}}_x^{aiw}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente bei Tod als Invalider mit Steigerung des anfänglichen Jahresbetrags 1 im mehrjährigen Rhythmus von m Jahren ab Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{aiw} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_kp_x^a \left[p_{x+k}^{ai} \; {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_{x+k+1}^{iw} + p_{x+k}^{aiw} \; \left(k^{(t)} + {}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_{y(x+k)+1}^{w} + \sigma \; {}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_{y(x+k)}^{w}\right.\right. $$

mit $k^{(t)}$ gemäß Gl. (3.3), ${}^{(0,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w$ gemäß Gl. (3.2) und ${}^{(t)}\Delta \mathrm{a}_y^w$ gemäß Gl. (3.8) und

$$ {}^{(t)}\tilde{\mathrm{a}}_x^{iw} \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} s^{\left[\frac{k}{m}\right]} \; v^{k+1} \;\; {}_kp_x^i \;\; p_{x+k}^{iw} \;\; \Big(\tilde{k}^{(\langle\frac{k}{m}\rangle,t)} \;+\; {}^{(\langle\frac{k}{m}\rangle+1,t)}\hat{\mathrm{a}}^w_{y(x+k)+1} \;+\; \sigma \;\; {}^{(\langle\frac{k}{m}\rangle+1,t)}\Delta a $$

mit ${}^{(h,t)}\hat{\mathrm{a}}_y^w$ gemäß Gl. (3.2),

$$ \tilde{k}^{(h,t)} \;=\; \begin{cases} k^{(t)} & \text{für} \quad h = 0, 1, \ldots, m-2 \\ k^{(t)} + \sigma\,\kappa^{(t)} & \text{für} \quad h = m-1 \end{cases} \;, $$

$$ {}^{(h,t)}\Delta \mathrm{a}_y^w \;=\; \sum_{k\,\in\,J} s^{\left[\frac{h+k}{m}\right]}\, v^k \;{}_kp_y^w \left[\frac{t-1}{2t} \;-\; \kappa^{(t)}\left(1 - v p^w_{y+k}\right)\right] $$

sowie J gemäß Gl. (3.6) und $\kappa^{(t)}$ gemäß Gl. (3.7)

(vgl. [2], Abschnitt 12, auch Gl. (1.1), (3.4) und (3.5)).

Bem.: Bei jährlicher Anpassung ($m = 1$) gilt stets $J = \mathbb{N}_0$, $h = 0$ und $\tilde{k}^{(0,t)} = k^{(t)} + \sigma\,\kappa^{(t)}$.

Literaturverzeichnis

[1] Heubeck, Klaus: „Richttafeln“, Köln 1998

[2] Neuburger, Edgar: „Bemerkungen zum Formelwerk der Richttafeln 1998“, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIV, Heft 1, S. 111-134, April 1999

[3] Neuburger, Edgar (Hrsg.): „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen“, Schriftenreihe angewandte Versicherungsmathematik, Heft 25, 2. Auflage, Karlsruhe 1997, dort Kapitel 2: Neuburger, Edgar: „Pensionsversicherungsmathematik “ .