Pensionsversicherungsmathematik

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Edgar Neuburger

Dipl.-Math. Korbinian Meindl

- Kontaktadressen: neuburger@neuburger.com
  meindl@neuburger.com

- Folien: www.neuburger.com -> Veröffentlichungen

1.1.1 Axiomensystem

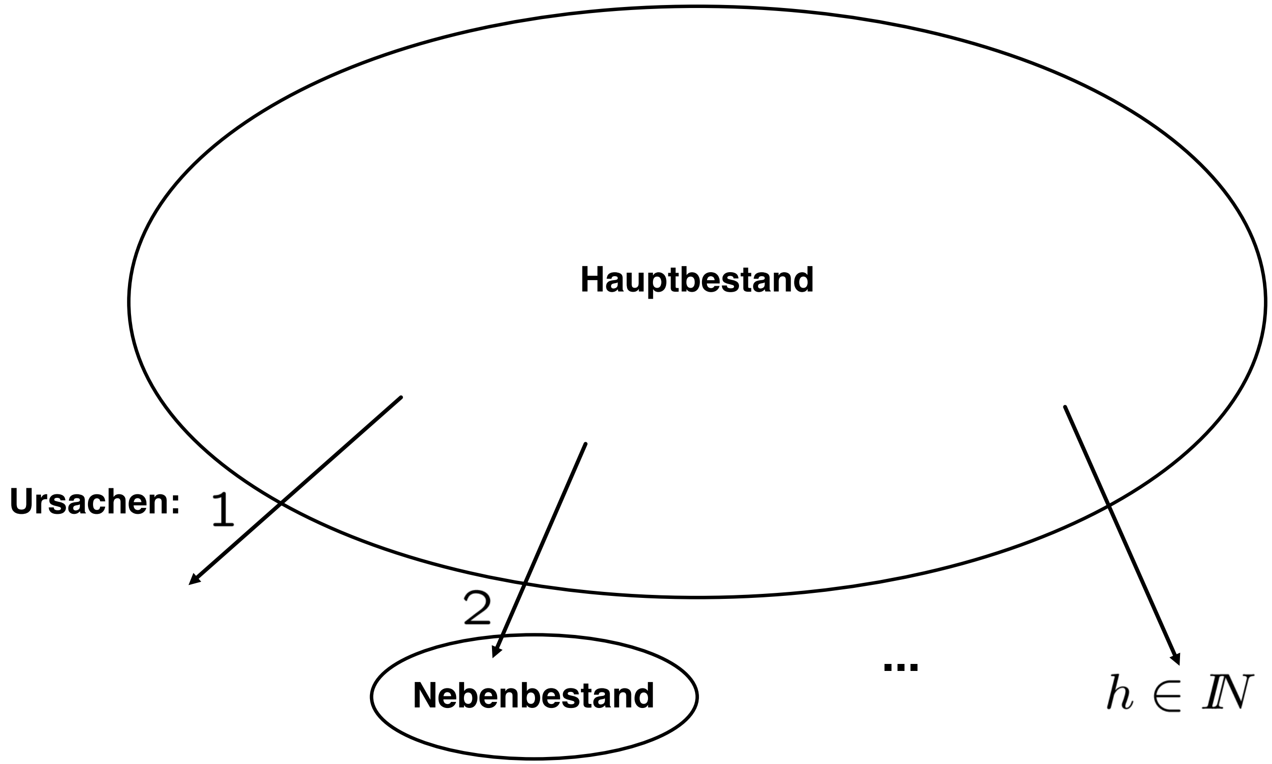
1. **Die Austrittszeitpunkte aus der Gesamtheit bzw. aus den Gesamtheiten (bei einem Aktivenbestand: aus dem Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestand) sind innerhalb des Jahres gleichverteilt;**

2. **Die Verzinsung innerhalb des Jahres erfolgt banküblich, d.h., linear, die Zinsgutschrift erfolgt also erst zum Ende des Jahres (Gemischte Verzinsung);**

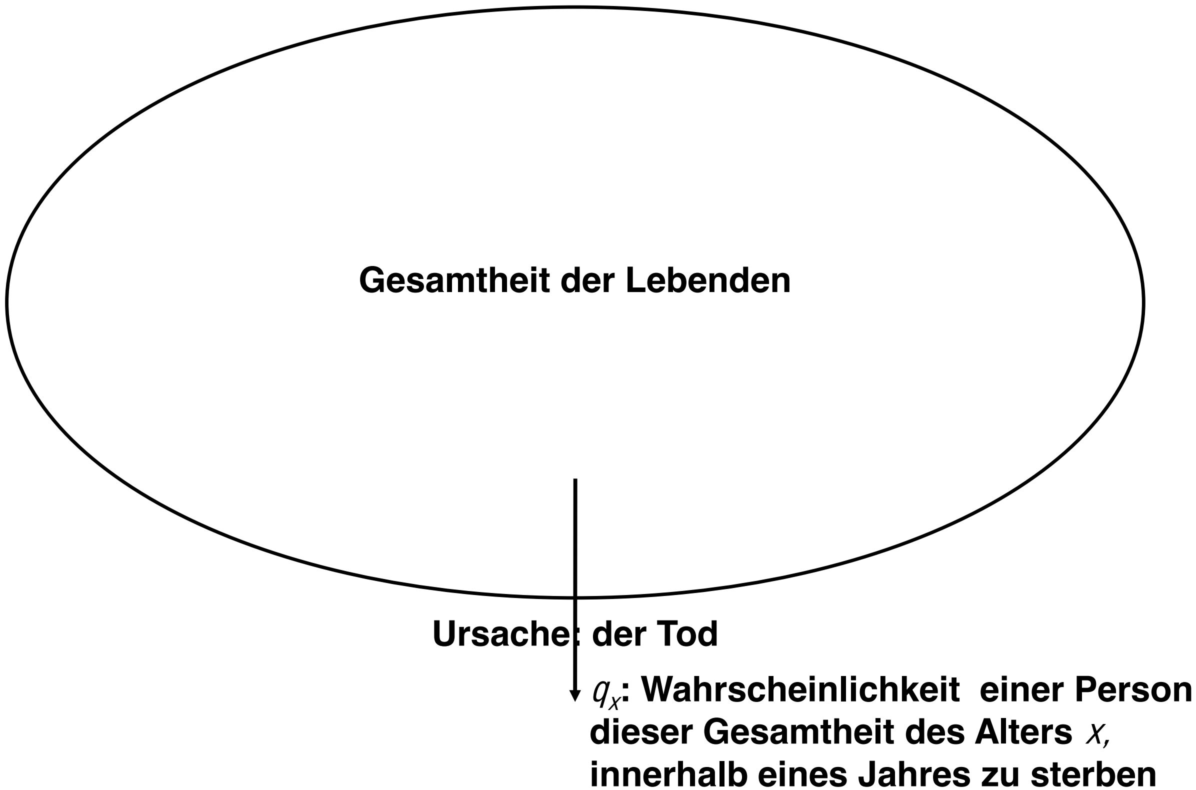
3. **Die Zahlungen der Renten erfolgen determiniert zum Beginn bzw. Ende der Zahlungsabschnitte, zu deren Beginn bzw. Ende ein Anspruch besteht (Determinierte Fälligkeit der Rentenzahlungen).**

Bem.: Axiom 2 und 3 werden lediglich in der Pensionsversicherungsmathematik angewandt, ansonsten werden meistens Näherungen benutzt. In der Pensionsversicherungsmathematik sind sie jedoch von entscheidender Bedeutung.

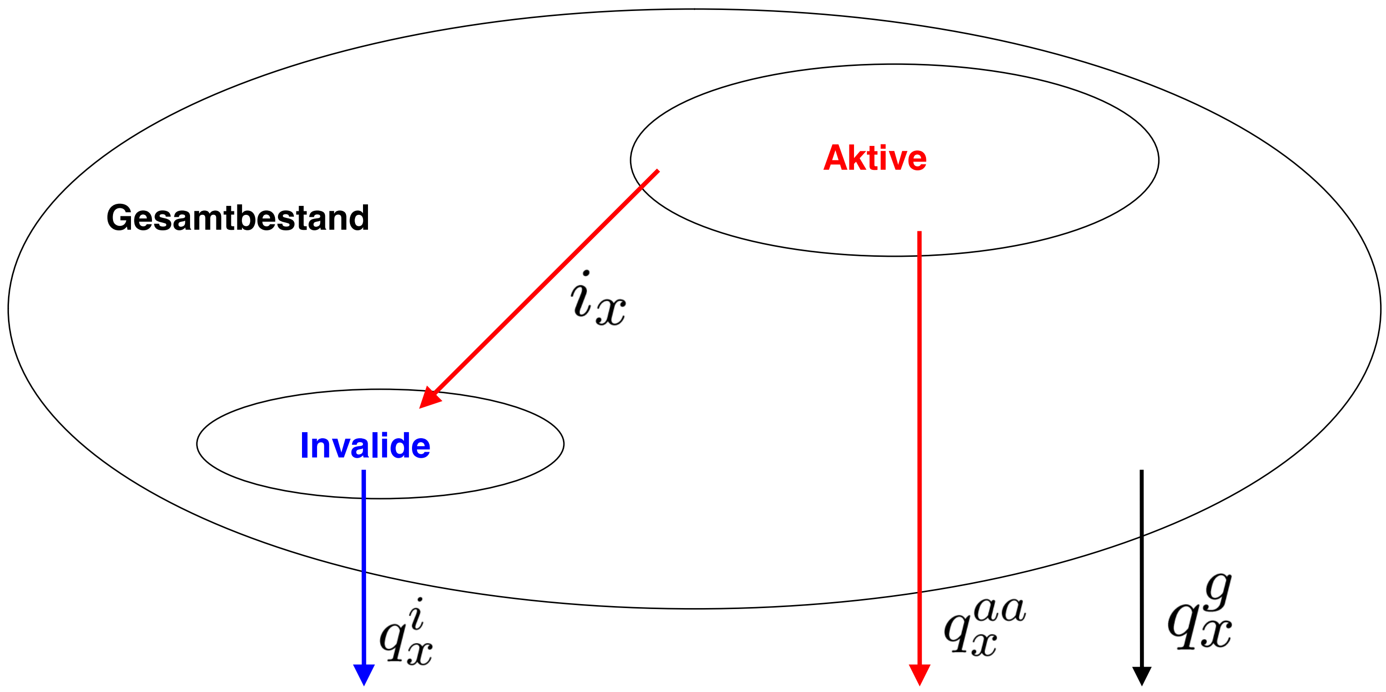
1.1.1 Allgemeines Modell



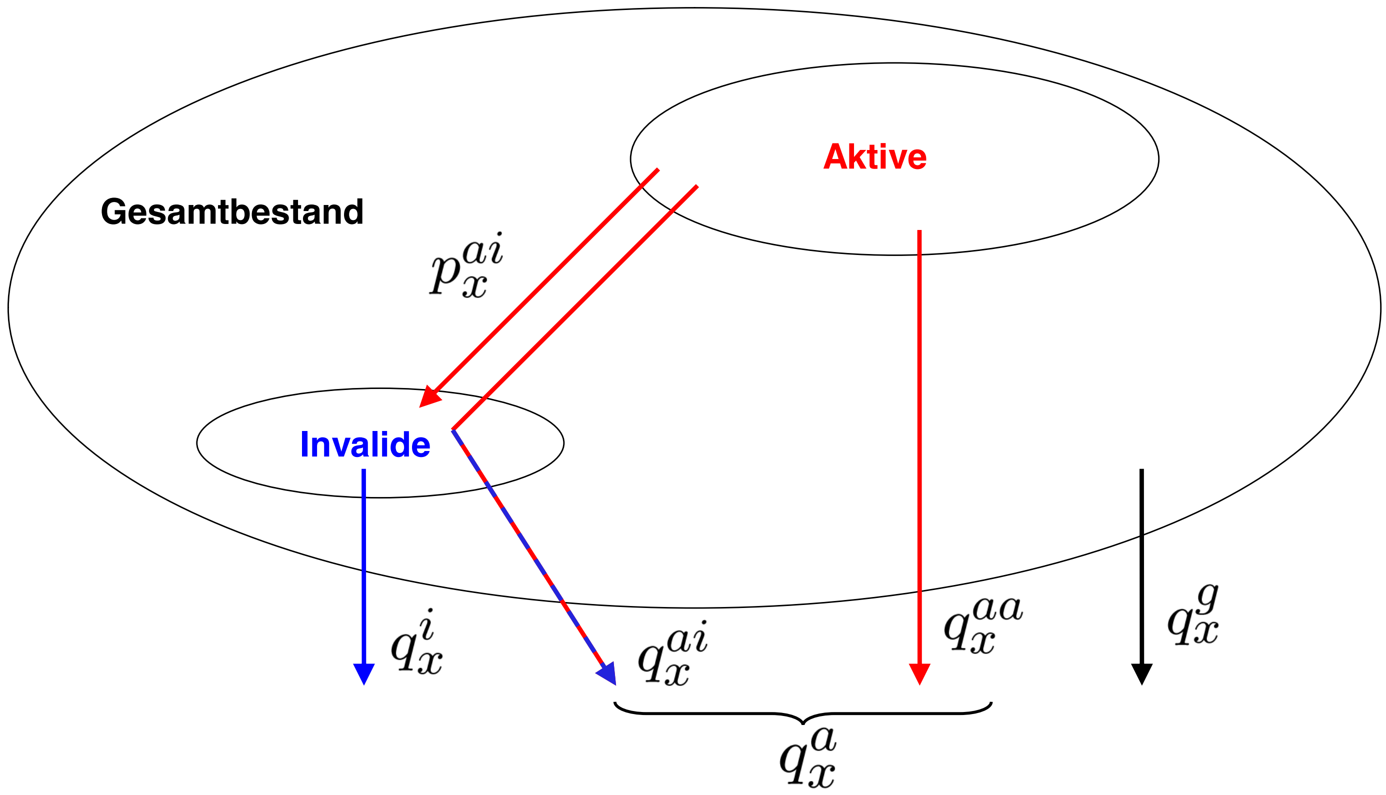
1.1.1 Einfache Ordnung



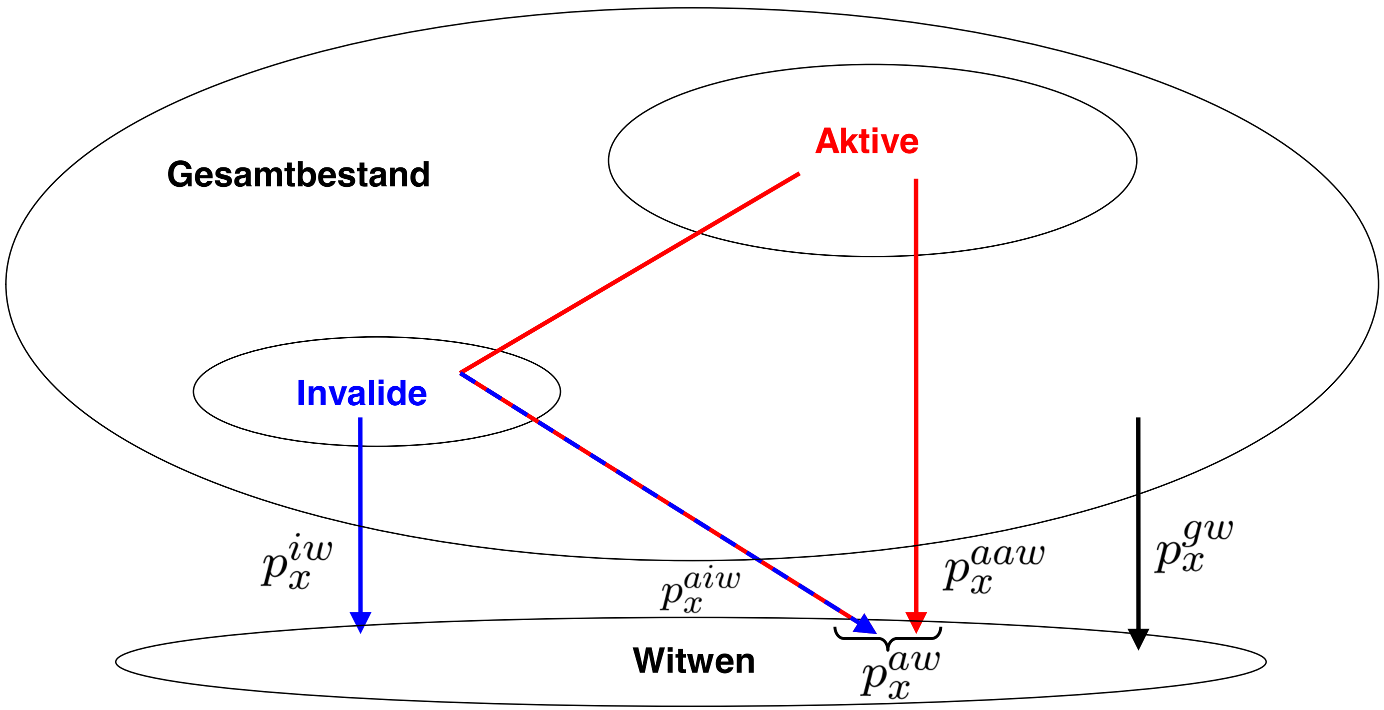
1.1.1 Aktivenbestand: Ausscheidewahrscheinlichkeiten



1.1.1 Aktivenbestand: Übergangswahrscheinlichkeiten



1.1.1 Aktivenbestand unter Einschluss des Witwenbestandes



$$p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}$$

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

- Kurze Zusammenfassung -

O.E.d.A.:Wahrscheinlichkeit des Ausscheidens hängt vom Alter x und ev. vom Geburtsjahrgang g ab.

$x \in \mathbb{R}_+$: kontinuierliche Darstellung
$x \in \mathbb{N}_0$: diskontinuierliche Darstellung

Kein Wiedereintritt nach Ausscheiden (keine Zyklen)

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

Wir betrachten eine Person der Gesamtheit.

Geburtszeitpunkt: $\boldsymbol{t^*} \in \mathbb{R}$
Geburtsjahrgang: $\boldsymbol{g} := [\boldsymbol{t^*}] \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{T}$: **Stetige Zufallsgröße: Zeitpunkt des Ausscheidens aus der Gesamtheit**
$\boldsymbol{X}$: **Stetige Zufallsgröße: Alter bei Ausscheiden aus der Gesamtheit**

$$\boldsymbol{X = T - t^*}$$

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

Einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeiten:

$$q_x(g) := q_x := P\{X \leq x+1 | X > x\},\ x \in \mathbb{N}_0 :$$

Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen des Bestandes mit Geburtsjahrgang g, bis zum Alter $x+1$ auszuscheiden.

Einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$p_x(g) := p_x := 1 - q_x = P\{X > x+1 | X > x\} :$$

Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen des Bestandes mit Geburtsjahrgang g, das Alter $x+1$ im Bestand zu erreichen

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

Wahrscheinlichkeit einer Person mit Geburtsjahrgang g, das Alter x im Bestand zu erleben:

$$l_x(g) := l_x := P\{X > x\}, \quad x \in \mathbb{R}_+ \ \text{ mit } \ l_0 = P\{X > 0\} = 1$$

Verallgemeinerung (Kontinuierliche Darstellung):

$x,\ s \in \mathbb{R}_+$

${}_sq_x(g) := {}_sq_x := P\{X \leq x + s | X > x\}$:

Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen des Bestandes mit Geburtsjahrgang g, bis zum Alter $x + s$ auszuscheiden.

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

Überlebenswahrscheinlichkeiten:

$${}_s p_x(g) := {}_s p_x := 1 - {}_s q_x = P\{X > x + s | X > x\} = \frac{l_{x+s}}{l_x} \quad :$$

Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen des Bestandes mit Geburtsjahrgang g, das Alter $x + s$ im Bestand zu erleben

Gleichverteilung der Austrittszeitpunkte innerhalb eines Jahres lässt sich wie folgt ausdrücken:

$${}_s q_x = s\, q_x\,, \; 0 \leq s \leq 1$$

Begründung:

Sei S: $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow ([0,1], [0,1] \cap \mathcal{B})$, stetig, die restliche Verbleibsdauer im Jahr des Ausscheidens, also

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

$\mathbf{X = [X] + S}$

Sei $\boldsymbol{0 \le u \le 1}$

Axiom 1 bedeutet: $\boldsymbol{P\{S \le u | [X] = x\} = u \; \forall \; x \in \mathbb{N}_0}$

$$\boldsymbol{P\{S \le u / [X] = x\}} = \frac{\boldsymbol{P\{S \le u, [X] = x\}}}{\boldsymbol{P\{[X] = x\}}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{P\{x < X \le x + u\}}}{\boldsymbol{P\{x < X \le x + 1\}}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{P\{X \le x + u | X > x\} \, P\{X > x\}}}{\boldsymbol{P\{X \le x + 1 | X > x\} \, P\{X > x\}}}$$

1.1.1 Ausscheideordnung - Einfache Ordnung

$$P\{S \leq u | [X] = x\} = \frac{P\{X \leq x + u | X > x\}}{P\{X \leq x + 1 | X > x\}}$$

$$= \frac{{}_u q_x}{q_x}$$

$$\Longrightarrow \qquad {}_u q_x = P\{S \leq u | [X] = x\} \, q_x \, , \qquad 0 \leq u \leq 1,$$

nach Axiom 1 also:

$${}_u q_x = u \, q_x$$

1.1.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung

Mehrere Ausscheideursachen

Konvention: Nur jeweils eine einzige Ausscheideursache führt zum Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit (Zwillingsfreiheit)

Übergänge von der Hauptgesamtheit in die Nebengesamtheit

Weitere Übergänge von der Nebengesamtheit möglich; Nebengesamtheit wird damit selbst zu einer Hauptgesamtheit

Keine Übergänge von einer Nebengesamtheit zurück zur Hauptgesamtheit (keine Zyklen)

1.1.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung

Modellvorstellung: Bez. einer Person treten h Ereignisse auf; das zuerst auftretende Ereignis führt zum Ausscheiden aus der Gesamtheit

h: Anzahl der Ausscheideursachen

T_i: Stet. Zufallsgröße: Zeitpunkt des Eintritts des Ereignisses i

X_i: Stetige Zufallsgröße: Alter bei Eintritt des Ereignisses i

$i = 1, \dots, h$

Geburtszeitpunkt der betrachteten Person: $t^* \in \mathbb{R}$
Geburtsjahrgang der betrachteten Person: $g := [t^*] \in \mathbb{Z}$

$X_i = T_i - t^*$

1.1.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung

Definitionen:

$$X := min_{1\leq i\leq h}(X_i): \quad \text{Ausscheidealter}$$

$$U := min\{i \in \{1,\ldots,h\} : X_i = X\}: \quad \text{Ausscheideursache}$$

Die Zufallsgröße U gibt die Ursache des Ausscheidens an. Eintreten des Ereignisses $\{U = i\}$ bedeutet also, dass das Ausscheiden wegen der Ursache i erfolgt.

$$\begin{aligned} q_x^{(i)}(g) &:= q_x^{(i)} \\ &:= P\{X \leq x+1, U = i | X > x\} \\ &:= P\{X \leq x+1, U = i | X_1 > x, \ldots, X_h > x\} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der Hauptgesamtheit mit Geburtsjahrgang g ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$), innerhalb des Intervalls $]x, x+1]$ aus der Ursache i auszuscheiden.

1.1.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung

Spezialisierungen:

$h = 1$ (Einfache Ordnung):

$$\begin{aligned} q_x^{(1)}(g) &= q_x^{(1)} \\ &= P\{X \leq x+1, U = 1 | X > x\} \\ &= P\{X_1 \leq x+1 | X_1 > x\} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der Hauptgesamtheit mit Geburtsjahrgang g ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$), innerhalb des Intervalls $]x, x+1]$ aus der ersten und einzigen Ursache auszuscheiden.

1.1.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung

$h = 2$ (Zusammengesetzte Ordnung, zwei Ursachen):

$$\begin{aligned} q_x^{(1)}(g) &= q_x^{(1)} \\ &= P\{X \leq x+1, U = 1 | X > x\} \\ &= P\{X_1 \leq x+1, X_1 \leq X_2 | X_1 > x, X_2 > x\} \\ &= P\{X_1 \leq min(x+1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x\} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der Hauptgesamtheit mit Geburtsjahrgang g ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$), innerhalb des Intervalls $]x, x+1]$ aus der Ursache 1 auszuscheiden.

$$\begin{aligned} q_x^{(2)}(g) &= q_x^{(2)} \\ &= P\{X \leq x+1, U = 2 | X > x\} \\ &= P\{X_2 \leq x+1, X_2 < X_1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\ &= P\{X_2 < min(x+1, X_1) | X_1 > x, X_2 > x\} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der Hauptgesamtheit mit Geburtsjahrgang g ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$), innerhalb des Intervalls $]x, x+1]$ aus der Ursache 2 auszuscheiden.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Geburtsjahrgang $g \in \mathbb{Z}$, Alter $x \in \mathbb{N}_0$; Endalter der Aktivengesamtheit: z; $x < z$

1. Aktivenbestand
Ausscheideursachen für $x < z$: Invalidität und Tod als Aktiver
$$h = 2, \quad i_x(g) := q_x^{(1)}(g), \quad q_x^{aa}(g) := q_x^{(2)}(g)$$

2. Invalidenbestand
Ausscheideursachen: Tod als Invalider
$$h = 1, \quad q_x^{i}(g) := q_x^{(1)}(g)$$

3. Gesamtbestand
Ausscheideursachen: Tod
$$h = 1, \quad q_x^{g}(g) := q_x^{(1)}(g)$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

X_1: **Alter bei Eintritt der Invalidität bei Geburtsjahrgang** g
X_2: **Alter bei Eintritt des Todes bei Geburtsjahrgang** g

$$i_x(g) = i_x = P\{X_1 \leq min(x+1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x\}:$$

Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres wegen Invalidität aus dem Aktivenbestand auszuscheiden (*einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit*)

$$q_x^{aa}(g) = q_x^{aa} = P\{X_2 < min(x+1, X_1) | X_1 > x, X_2 > x\}:$$

Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben (*einjährige Aktivensterblichkeit*)

Bem.: Beachten Sie die Unsymmetrie in den Definitionen!

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$l_x^a(g) := l_x^a := P\{X_1 > x, X_2 > x\},\ x \in \mathbb{R}_+,\ g \in \mathbb{Z}$:

Wahrscheinlichkeit einer Person mit Geburtsjahrgang g, im Alter x aktiv zu sein

Für $x \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} p_x^a(g) :&= p_x^a \\ :&= P\{X_1 > x+1, X_2 > x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\ &= 1 - i_x(g) - q_x^{aa}(g) : \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, im Alter $x+1$ aktiv zu sein (*Bestandsverbleibewahrscheinlichkeit*)

Bem.: Treten also Invalidität und Tod gleichzeitig auf, so gilt per Definition das Ausscheiden als durch Invalidität erfolgt.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Weitere Ausscheidewahrscheinlichkeiten:

$q_x^i(g) = q_x^i = P\{X_2 \leq x+1 | X_1 \leq x, X_2 > x\}$:
Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Invaliden mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres zu sterben *(einjährige Invalidensterbewahrscheinlichkeit)*

$q_x^a(g) := q_x^a := P\{X_2 \leq x+1 | X_1 > x, X_2 > x\}$:
Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres zu sterben, sei es als Aktiver, sei es als Invalider

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Die *Gesamtsterblichkeit* $q_x^g(g)$ als Mischverteilung aus $q_x^a(g)$ und $q_x^i(g)$:

$$q_x^g(g) := \mathrm{q}_x^g := P\{X_2 \leq x + 1 | X_2 > x\}:$$

Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres zu sterben (*Gesamtsterbewahrscheinlichkeit*)

Einfache Ordnung ! Die Eigenschaft „Invalidität” tritt dabei nicht explizit als Merkmal auf !

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$p_x^g(g) = p_x^g = 1 - q_x^g = P\{X_2 > x + 1 | X_2 > x\}$:

Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x mit Geburtsjahrgang g, im Alter $x + 1$ zum Gesamtbestand zu gehören (*Bestandsverbleibewahrscheinlichkeit*)

$l_x^g(g) = l_x^g = P\{X_2 > x\}$ **(gilt für $x \in \mathbb{R}_+$) :**

Wahrscheinlichkeit einer Person des Geburtsjahrgangs g, das Alter x im Gesamtbestand zu erreichen, sei es als Aktiver, sei es als Invalider.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Zusammenhang zwischen q_x^g, q_x^a und q_x^i eines Geburtsjahrganges (1. Konsistenzgleichung):

$$\begin{aligned}
q_x^g &= P\{X_2 \leq x+1 | X_2 > x\} \\
&= P\{X_2 \leq x+1, X_1 \leq x | X_2 > x\} + P\{X_2 \leq x+1, X_1 > x | X_2 > x\} \\
&= P\{X_2 \leq x+1 | X_1 \leq x, X_2 > x\} P\{X_1 \leq x | X_2 > x\} \\
&\quad + P\{X_2 \leq x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} P\{X_1 > x | X_2 > x\} \\
&= q_x^i \, P\{X_1 \leq x | X_2 > x\} + q_x^a \, P\{X_1 > x | X_2 > x\}.
\end{aligned}$$

q_x^g : gewichtetes Mittel der Sterbewahrscheinlichkeit der Invaliden q_x^i und der Sterbewahrscheinlichkeit der Aktiven q_x^a

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x, aktiv zu sein (zum Aktivenbestand zu gehören):

$$P\{X_1 > x | X_2 > x\} = \frac{P\{X_1 > x, X_2 > x\}}{P\{X_2 > x\}} = \frac{l_x^a}{l_x^g}$$

Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x, invalide zu sein (zum Invalidenbestand zu gehören):

$$P\{X_1 \leq x | X_2 > x\} = 1 - P\{X_1 > x | X_2 > x\} = 1 - \frac{l_x^a}{l_x^g} = \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g}$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$$q_x^g = \frac{l_x^a}{l_x^g}\, q_x^a + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g}\, q_x^i$$

$$q_x^g = q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g}(q_x^i - q_x^a)$$

Diese Beziehungen gelten exakt pro Geburtsjahrgang !

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Ansatz der RT 2005 G für q_x^a eines Geburtsjahrgangs (Übergang findet in der Mitte des Jahres, d.h. rechnunsmäßig statt, da $\mathcal{E}(X_2 - [X_2]) = \frac{1}{2}$):

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$$

$$q_x^{ai} = i_x \, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$$

Es folgt als 1. Konsistenzgleichung:

$$q_x^g = q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g}\left(q_x^i - q_x^{aa} - i_x \, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}\right)$$

Die vier Ausscheidewahrscheinlichkeiten q_x^g, q_x^i, q_x^{aa} und i_x eines Geburtsjahrgangs müssen dieser Gleichung genügen.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Gleichverteilung der Austrittszeitpunkte des Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestands gemäß Axiom 1 des Axiomensystems:

Pro Geburtsjahrgang gilt:

$$\left.\begin{aligned} {}_u q_x^{aa} &= u\, q_x^{aa} \\ {}_u i_x &= u\, i_x \\ {}_u q_x^{i} &= u\, q_x^{i} \\ {}_u q_x^{a} &= u\, q_x^{a} \\ {}_u q_x^{g} &= u\, q_x^{g} \end{aligned}\right\} \quad 0 \le u \le 1$$

Für ${}_u q_x^a$ folgt diese Beziehung aus der 1. Konsistenzgleichung.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Berechnung von $_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}$ in einer einfachen Ordnung für einen Geburtsjahrgang:

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} &= 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} \\
{}_{\frac{1}{2}}p_x \; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} &= p_x \quad \Longrightarrow \quad {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = \frac{p_x}{{}_{\frac{1}{2}}p_x} \\
{}_{\frac{1}{2}}p_x &= 1 - {}_{\frac{1}{2}}q_x \\
{}_{\frac{1}{2}}q_x &= \frac{1}{2}\,q_x \quad \Longrightarrow \quad {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1-q_x}{1-\frac{1}{2}\,q_x}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\,q_x}{1-\frac{1}{2}\,q_x} \quad \textbf{: Zurückführung auf das ganzzahlige Altersgitter!}
$$

$$
{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1-q_x}{1-\frac{1}{2}\,q_x}
$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$h_x(g) = h_x$: **Wahrscheinlichkeit einer Person mit Geburtsjahrgang g, bei Tod in der Altersspanne $]x, x+1]$ verheiratet zu sein ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$).**

$y(g,x) = y(x)$: **Mittleres ganzzahliges Alter des Ehegatten bei Tod des Berechtigten mit Geburtsjahrgang g in der Altersspanne $]x, x+1]$ ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$)**

$q_y^w(g') = q_y^w$: **Wahrscheinlichkeit einer y-jährigen Witwe/Witwers mit Geburtsjahrgang g', innerhalb eines Jahres zu sterben ($y \in \mathbb{N}_0$, $g' \in \mathbb{Z}$) (*einjährige Witwen/Witwersterbewahrscheinlichkeit*)**

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$)

$q_x^b(g) = q_x^b$: **Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands b mit Alter x und Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres zu sterben, $b \in \{ r, i, g, w \}$**

$q_x^{aa}(g) = q_x^{aa}$: **Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben**

$i_x(g) = i_x$: **Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres invalide zu werden**

$p_x^{ai}(g) = p_x^{ai}$: **Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben (Gemäß RT-Annahmen: $i_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}(g)$)**

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$q_x^{ai}(g) = q_x^{ai}$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr - als Invalider - zu sterben (Gemäß RT-Annahmen: $i_x(g)\,{}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}(g)$)

$q_x^{a}(g) = q_x^{a}$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres zu sterben ($q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$; gemäß RT-Annahmen: $q_x^{aa}(g) + i_x(g)\,{}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}(g)$)

Es gilt: $q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$ pro Geburtsjahrgang

$$\Longrightarrow \quad {}_uq_x^a = {}_uq_x^{aa} + {}_uq_x^{ai}, \quad {}_uq_x^a = u\,q_x^a, \quad {}_uq_x^{aa} = u\,q_x^{aa}$$

$$\Longrightarrow \quad {}_uq_x^{ai} = u\,q_x^{ai},\ 0 \le u \le 1$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Übergangswahrscheinlichkeiten bei Tod:

$p_x^{bw}(g) = p_x^{bw}$: **Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands b mit Alter x und Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht, $b \in \{ r, i, g \}$**

Gemäß RT-Annahmen:

$$p_x^{bw}(g) = q_x^b(g)\, h_x(g)\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g'),$$

$$g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x) \in \mathbb{Z}$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$p_x^{aaw}(g) = p_x^{aaw}$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres als Aktiver unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht

Gemäß RT-Annahmen:

$$p_x^{aaw}(g) = q_x^{aa}(g)\, h_x(g)\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g')$$

$$g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x)$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$p_x^{aiw}(g) = p_x^{aiw}$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht (Gemäß RT-Annahmen: $q_x^{ai}(g)\, h_x(g)\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g')$, $g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x)$)

$p_x^{aw}(g) = p_x^{aw}$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht (Gemäß RT-Annahmen: $q_x^{a}(g)\, h_x(g)\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g')$, $g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x)$)

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Für die Wahrscheinlichkeiten eines Geburtsjahrgangs gilt:

$$p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}$$

2. Konsistenzgleichung:

$$p_x^{gw} = \frac{l_x^a}{l_x^g} p_x^{aw} + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} p_x^{iw}$$

Beweis analog zur 1. Konsistenzgleichung; folgt bei RT-Annahmen unmittelbar aus der 1. Konsistenzgleichung.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Berechnung von $p_x^{aiw}(g) = p_x^{aiw}$ für ein festes $g \in \mathbb{Z}$:

$$l_x^a\, p_x^{aw} = l_x^g\, p_x^{gw} - (l_x^g - l_x^a)\, p_x^{iw}$$

$$= \underbrace{\left(l_x^g\, q_x^g - (l_x^g - l_x^a)\, q_x^i\right)}_{l_x^a\, q_x^a \quad \text{gemäß 1. Konsistenzgleichung}} h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad p_x^{aw} = q_x^a\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow p_x^{aiw} = p_x^{aw} - p_x^{aaw}$$

$$= \left(q_x^a - q_x^{aa}\right) h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$$

$$= \mathrm{q}_x^{ai}\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}, \qquad \text{da } q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$$

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Die Beziehung ${}_uq_x^{ai} = u\,q_x^{ai}\,,\ x \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq u \leq 1,$ für die Wahrscheinlichkeiten eines Geburtsjahrgangs zeigt:

In der Gesamtheit der Aktiven, die innerhalb eines Jahres invalide werden und noch im gleichen Jahr sterben, ist neben dem Zeitpunkt des Ausscheidens durch Invalidität auch der Zeitpunkt des anschließenden Todes gleichverteilt. D.h.:

Für eine Person aus der Gesamtheit der Aktiven des Geburtsjahrgangs g und des Altersintervalls $[x, x+1],$ die innerhalb dieses Altersabschnitts invalide wird und noch im gleichen Jahr stirbt, sei

Z_1: Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität innerhalb des Jahres;

Z_2: Zeitpunkt des Eintritts des Todes innerhalb des Jahres.

Dann sind nach Voraussetzung beide Zufallsgrößen gleichverteilt.

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

Zudem gilt:

$$Z_1 \leq Z_2 \, ,$$

d.h., in der betrachteten Gesamtheit liegt der Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität nicht nach dem Zeitpunkt des Eintritts des Todes.

Lemma: Seien X und Y reellwertige Zufallsgrößen mit identischer Verteilung und sei weiter $X \leq Y$ f.s. Dann gilt: $X = Y$ f.s..

Anwendung:
$X = Z_1$ „Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität“
$Y = Z_2$ „Zeitpunkt des Eintritts des Todes“
Z_1, Z_2 identisch verteilt

1.2.1 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Modell der Richttafeln

$\Longrightarrow$

$$Z_1 = Z_2 \quad \text{f.s.}$$

d.h., f.s. fällt der Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität mit dem Zeitpunkt des Eintritts des Todes zusammen. Der Doppelübergang „Aktiver → Invalider → Tod“ findet also f.s. in einem und demselben Augenblick statt.

Die in den Richttafeln zur Berechnung von Übergangswahscheinlichkeiten zusätzlich getroffene Annahme, dass die Invalidität rechnungsmäßig, d.h. in der Mitte des Jahres eintritt, bedeutet, dass auch der Doppelübergang „Tod nach Invalidität“ rechnungsmäßig, d.h. in der Mitte des Jahres eintritt.

Analoge Aussagen gelten für Gesamtheiten mit drei oder mehr Ausscheideursachen.

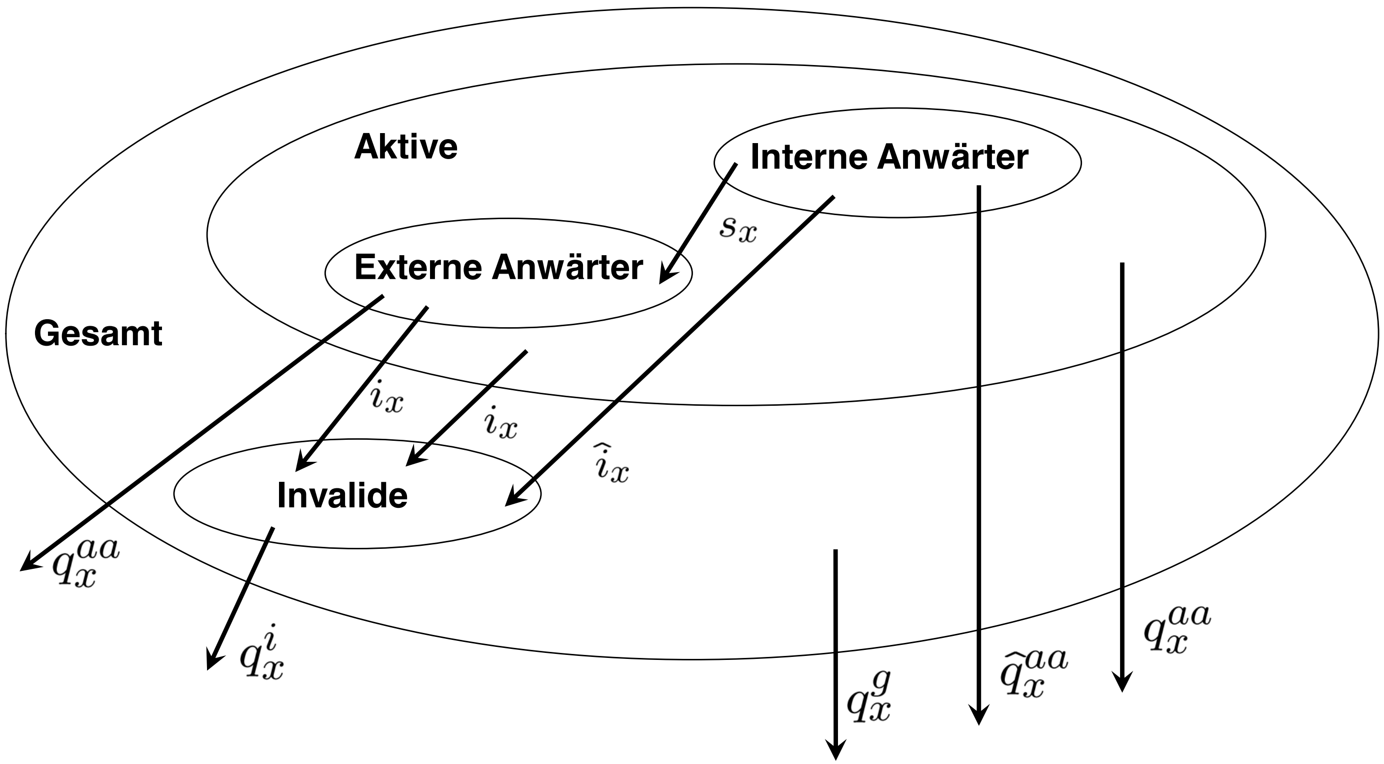
1.2.2 Axiomensystem des erweiterten Modells

1. **Die Austrittszeitpunkte aus dem Bestand der Internen Anwärter, Externen Anwärter, Aktiven und Invaliden sowie aus dem Gesamtbestand sind innerhalb des Jahres gleichverteilt;**

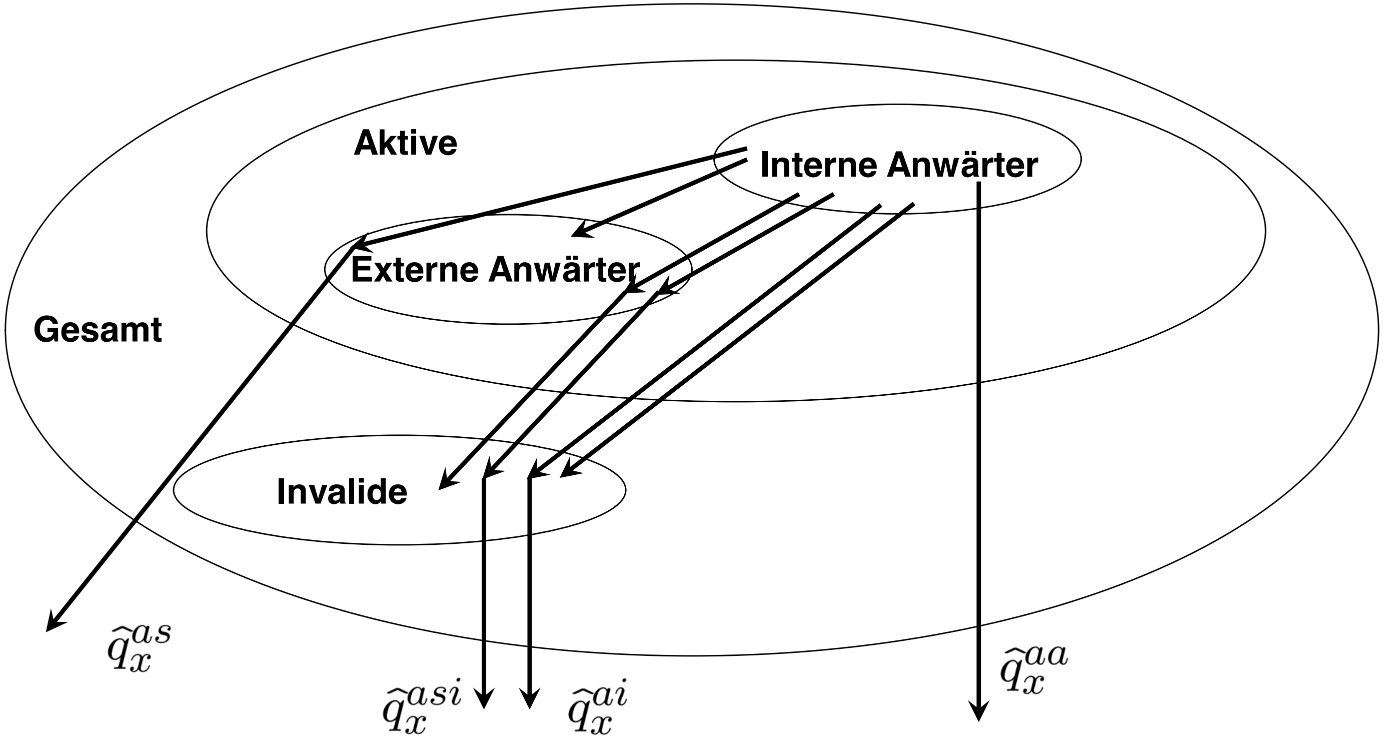
2. **Die Verzinsung innerhalb des Jahres erfolgt banküblich, d.h., linear, die Zinsgutschrift erfolgt also erst zum Ende des Jahres (Gemischte Verzinsung);**

3. **Die Zahlungen der Renten erfolgen determiniert zum Beginn bzw. Ende der Zahlungsabschnitte, zu deren Beginn bzw. Ende ein Anspruch besteht (Determinierte Fälligkeit der Rentenzahlungen).**

1.2.2 Erw. Modell: Auscheidewahrscheinlichkeiten



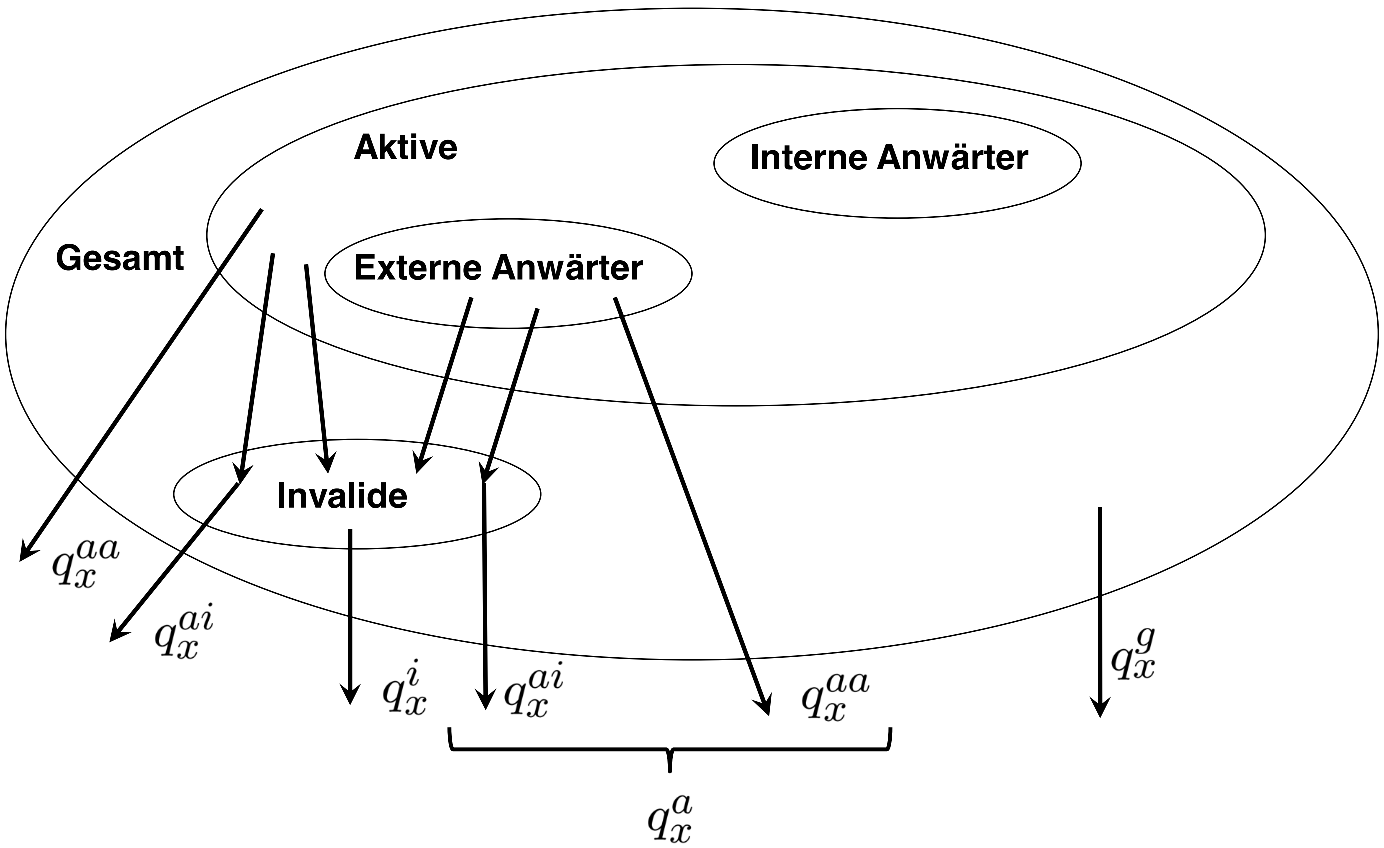
1.2.2 Erw. Modell: Übergänge vom internen Anwärter



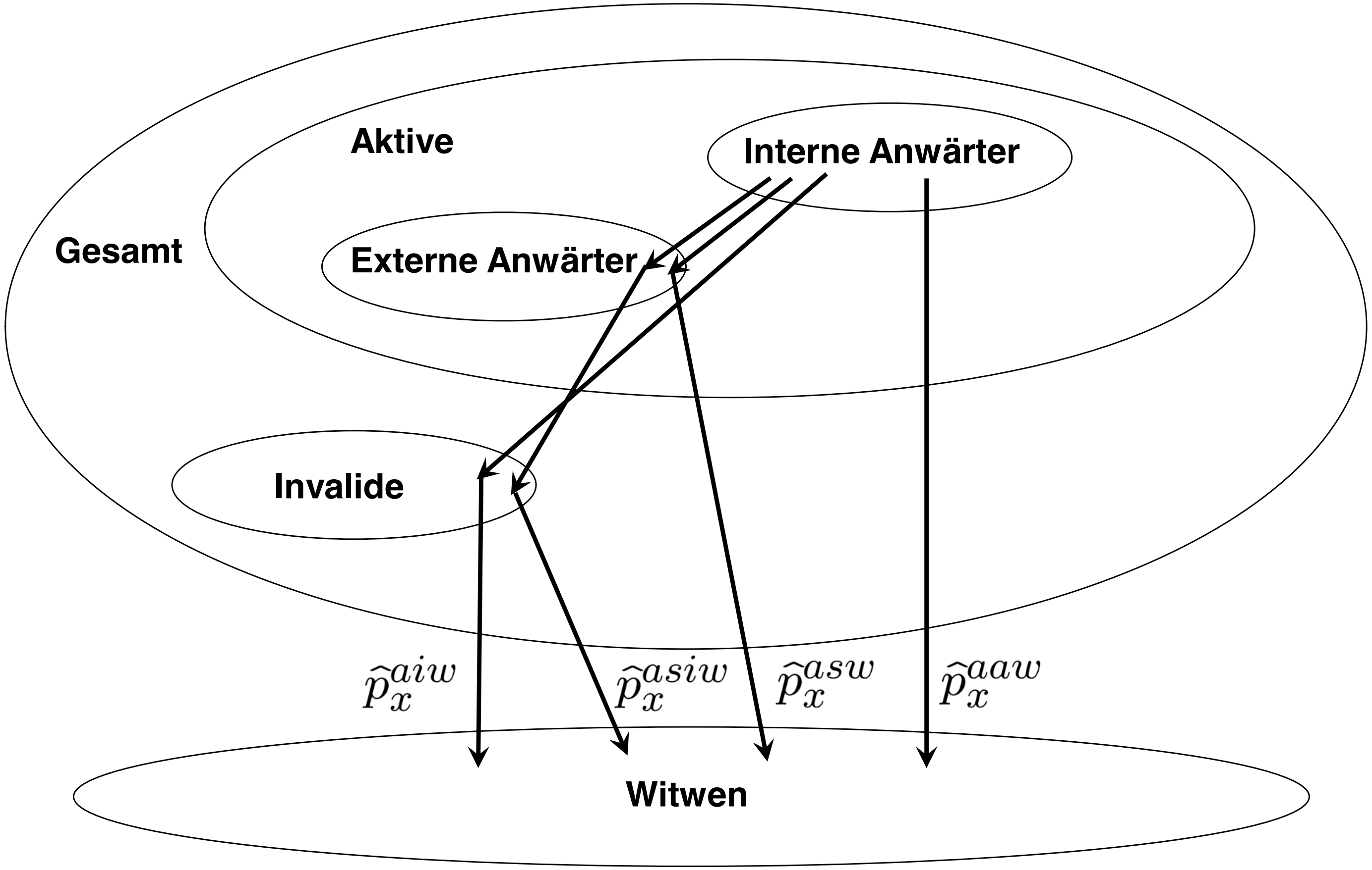
$$\underbrace{\phantom{\widehat{q}_x^{aa}+\widehat{q}_x^{as}+\widehat{q}_x^{ai}+\widehat{q}_x^{asi}}}_{\widehat{q}_x^{a}}$$

$$\widehat{q}_x^{a} = \widehat{q}_x^{aa} + \widehat{q}_x^{as} + \widehat{q}_x^{ai} + \widehat{q}_x^{asi}$$

1.2.2 Erw. Modell: Übrige Übergänge

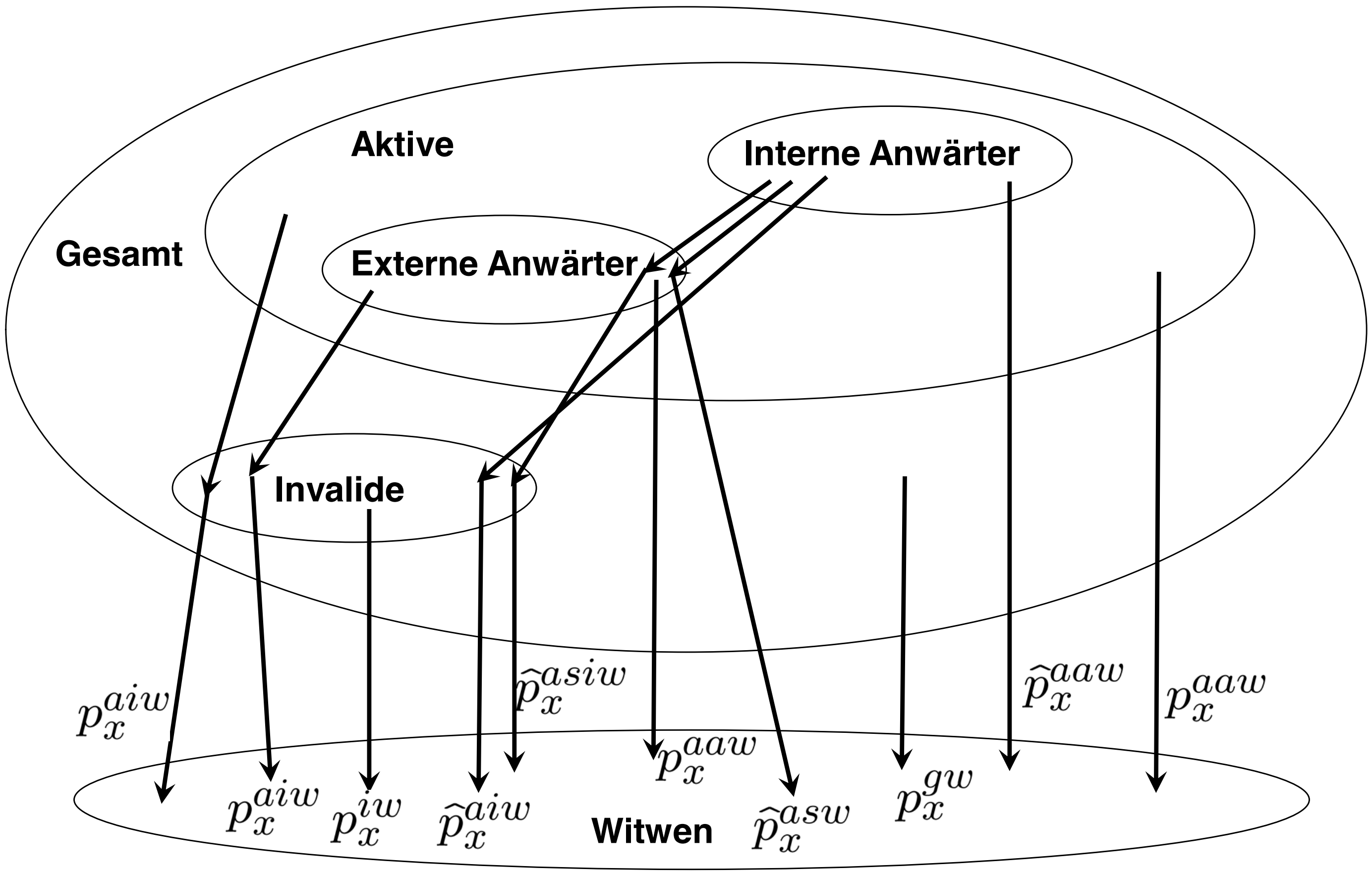


1.2.2 Erw. Modell: Übergänge int. Anw zum Witwenbestand



$$\widehat{p}_x^{aw} = \widehat{p}_x^{aaw} + \widehat{p}_x^{asw} + \widehat{p}_x^{aiw} + \widehat{p}_x^{asiw}$$

1.2.2 Erw. Modell: Übergänge zum Witwenbestand



1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

Der Bestand der internen Anwärter besitzt 3 vorzeitige Ausscheideursachen ($h = 3$):

- **Fluktuation**
- **Invalidität**
- **Tod als interner Anwärter**

Seien im Rahmen des allgemeinen Modells definiert:

X_1 **: Alter bei Eintritt der Fluktuation**

X_2 **: Alter bei Eintritt der Invalidität**

X_3 **: Alter bei Eintritt des Todes**

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

Gleichzeitiger Eintritt der Ereignisse	Ausscheiden durch:
Fluktuation, Invalidität und Tod	Fluktuation
Fluktuation und Invalidität	Fluktuation
Fluktuation und Tod	Fluktuation
Invalidität und Tod	Invalidität

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$h = 3$ (Zusammengesetzte Ordnung, drei Ursachen):

$$\begin{aligned}
q_x^{(1)}(g) &= q_x^{(1)} \\
&= P\{X \leq x+1, U = 1 | X > x\} \\
&= P\{X_1 \leq x+1, X_1 \leq X_2, X_1 \leq X_3 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\
&= P\{X_1 \leq min(x+1, X_2, X_3) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\
q_x^{(2)}(g) &= q_x^{(2)} \\
&= P\{X \leq x+1, U = 2 | X > x\} \\
&= P\{X_2 \leq x+1, X_2 < X_1, X_2 \leq X_3 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\
q_x^{(3)}(g) &= q_x^{(3)} \\
&= P\{X \leq x+1, U = 3 | X > x\} \\
&= P\{X_3 \leq x+1, X_3 < X_1, X_3 < X_2 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\
&= P\{X_3 < min(x+1, X_1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}
\end{aligned}$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus dem Bestand der internen Anwärter bei Geburtsjahrgang g ($x \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{Z}$):

$\hat{i}_x(g) := q_x^{(2)}(g)$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Invalidität auszuscheiden;**

$\hat{q}_x^{aa}(g) := q_x^{(3)}(g)$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Tod auszuscheiden;**

$s_x(g) := q_x^{(1)}(g)$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres wegen Fluktuation auszuscheiden.**

Bem.: In praxi ist meist s_{xs} oder s_{xm} statt s_x zu verwenden, mit s: Eintrittsalter bzw.m: Dauer seit Eintritt; dies ist für die Darstellung der Theorie unerheblich. I.a. besteht dagegen keine Abhängigkeit vom Geburtsjahrgang: $s_x(g) = s_x \,\forall\, g$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{as}(g) = \hat{p}_x^{as}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden und das Ende des Jahres als externer Anwärter zu erleben (Gemäß RT-Annahmen: $\hat{p}_x^{as}(g) = s_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+\frac{1}{2}}(g)$)**

Bem.:

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}p^a_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{l^a_{x+\frac{1}{2}}}{l^a_x}\ \frac{l^a_{x+1}}{l^a_{x+\frac{1}{2}}} = p^a_x \\
\Rightarrow \qquad {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{p^a_x}{{}_{\frac{1}{2}}p^a_x} \\
&= \frac{1 - i_x - q^{aa}_x}{1 - {}_{\frac{1}{2}}i_x - {}_{\frac{1}{2}}q^{aa}_x} \\
&= \frac{1 - i_x - q^{aa}_x}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q^{aa}_x)}
\end{aligned}
$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{q}_x^{as}(g) = \hat{q}_x^{as}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden und noch im gleichen Jahr als externer Anwärter zu sterben (Gemäß RT-Annahmen: $\hat{q}_x^{as}(g) = s_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}(g)$)**

Bem.: Aus $q_x^{aa} = {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} + {}_{\frac{1}{2}}p_x^{a}\ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}$ **und** ${}_{\frac{1}{2}}p_x^{a} = 1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})$

folgt $\quad q_x^{aa} - {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} = q_x^{aa} - \frac{1}{2}\, q_x^{aa} = \frac{1}{2}q_x^{aa} = {}_{\frac{1}{2}}p_x^{a}\ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa},$

somit

$${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = \frac{\dfrac{1}{2}q_x^{aa}}{1 - \dfrac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})}$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{ai}(g) = \hat{p}_x^{ai}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Invalidität auszuscheiden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben (Gemäß RT-Annahmen: $\hat{p}_x^{ai}(g) = \hat{i}_x(g)\ \ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}(g)$)**

$\hat{q}_x^{ai}(g) = \hat{q}_x^{ai}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Invalidität auszuscheiden und noch im gleichen Jahr - als Invalider - zu sterben (Gemäß RT-Annahmen: $\hat{q}_x^{ai}(g) = \hat{i}_x(g)\ \ {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}(g)$)**

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{asi}(g) = \hat{p}_x^{asi}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden, im gleichen Jahr - als externer Anwärter - invalide zu werden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben**

Gemäß RT-Annahmen:

$$\hat{p}_x^{asi}(g) = s_x(g) \; {}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}}(g) \; {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}(g)$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{q}_x^{asi}(g) = \hat{q}_x^{asi}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden und im gleichen Jahr sowohl noch invalide zu werden als auch - als Invalider - zu sterben (Gemäß RT-Annahmen: $\hat{q}_x^{asi}(g) = s_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}}(g)\ {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}(g)$)**

$\hat{q}_x^{a}(g) = \hat{q}_x^{a}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres zu sterben**

Es gilt für die Wahrscheinlichkeiten eines Geburtsjahrgangs:

$$\begin{aligned} \hat{q}_x^a &= P\{X_3 \leq x+1 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= \hat{q}_x^{aa} + \hat{q}_x^{as} + \hat{q}_x^{ai} + \hat{q}_x^{asi} \end{aligned}$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{aaw}(g) = \hat{p}_x^{aaw}$: **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen internen Anwärters mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres als interner Anwärter unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht**

Gemäß RT-Annahmen:

$$\hat{p}_x^{aaw}(g) = \hat{q}_x^{aa}(g)\, h_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g')$$

$$g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x)$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{asw}(g) = \hat{p}_x^{asw}$: **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen internen Anwärters mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden und noch im gleichen Jahr als externer Anwärter unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht**

Gemäß RT-Annahmen:

$$\hat{p}_x^{asw}(g) = \hat{q}_x^{as}(g)\, h_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g')$$

$$g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x)$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{aiw}(g) = \hat{p}_x^{aiw}$: **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen internen Anwärters mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Invalidität auszuscheiden und noch im gleichen Jahr als Invalide unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g,x)+1$ erreicht**

Gemäß RT-Annahmen:

$$\hat{p}_x^{aiw}(g) = \hat{q}_x^{ai}(g)\, h_x(g)\; {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g')$$

$$g' = g'(g,x) = g + x - y(g,x)$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{asiw}(g) = \hat{p}_x^{asiw}$: **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen internen Anwärters mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden und im gleichen Jahr sowohl noch invalide zu werden als auch - als Invalider - unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g, x) + 1$ erreicht**

Gemäß RT-Annahmen:

$$\hat{p}_x^{asiw}(g) = \hat{q}_x^{asi}(g)\, h_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x)+\frac{1}{2}}(g')$$

$$g' = g'(g, x) = g + x - y(g, x)$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$\hat{p}_x^{aw}(g) = \hat{p}_x^{aw}$: **Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen internen Anwärters mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten mit Geburtsjahrgang g' zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(g, x) + 1$ erreicht**

Gemäß RT-Annahmen:

$$\hat{p}_x^{aw}(g) = \hat{q}_x^{a}(g)\, h_x(g)\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x)+\frac{1}{2}}(g')$$

$$g' = g'(g, x) = g + x - y(g, x)$$

Es gilt für die Wahrscheinlichkeiten eines Geburtsjahrgangs:

$$\hat{p}_x^{aw} = \hat{p}_x^{aaw} + \hat{p}_x^{asw} + \hat{p}_x^{aiw} + \hat{p}_x^{asiw}$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

Überlegung: Wg. $P(A|B) = P(A) \implies P(A|\bar{B}) = P(A)$ f. bel. Ereignisse A, B folgt aus

$$\begin{aligned} q_x^{aa}(g) &= P\{X_3 < min(x+1, X_2) | X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= P\{X_3 < min(x+1, X_2) | X_1 \leq x, X_2 > x, X_3 > x\} \end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} P\{X_3 < min(x+1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= P\{X_3 < min(x+1, X_2) | X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= q_x^{aa}(g) \end{aligned}$$

$(g \in \mathbb{Z})$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

$q_x^{aa}(g) = q_x^{aa}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Geburtsjahrgang g, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben**

$$q_x^{aa} = \hat{q}_x^{aa} + \hat{q}_x^{as}$$

$$\hat{q}_x^{as} = s_x \; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}$$

$$\hat{q}_x^{aa} = q_x^{aa} - \hat{q}_x^{as}$$

$$= q_x^{aa} - s_x \; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} \quad = q_x^{aa} - s_x \frac{\frac{1}{2}q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\hat{q}_x^{aa}(g) = q_x^{aa}(g) \left(1 - \frac{\frac{1}{2}s_x(g)}{1 - \frac{1}{2}(i_x(g) + q_x^{aa}(g))}\right)$$

1.2.2 Ausscheideordnung - Zusammengesetzte Ordnung - Erweitertes Modell

Analog:

$\boldsymbol{i_x(g) = i_x}$: **Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters $\boldsymbol{x}$ mit Geburtsjahrgang $\boldsymbol{g}$, innerhalb eines Jahres invalide zu werden**

$$i_x = \hat{i}_x + s_x \; {}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}}$$

$$\hat{i}_x = i_x - s_x \; {}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}} \qquad = i_x - s_x \frac{\frac{1}{2} i_x}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})}$$

$\Longrightarrow$

$$\hat{i}_x(g) = i_x(g) \left(1 - \frac{\frac{1}{2} s_x(g)}{1 - \frac{1}{2}(i_x(g) + q_x^{aa}(g))} \right)$$

1.3.1 Der Erfüllungsbetrag einer Verpflichtung

- Kurze Zusammenfassung -

$T := (t_n, n \in \mathbb{N}_\circ)$ **mit** $t_n \in \mathbb{R}_+$: $t_n < t_{n+1}\, \forall n$ **: Folge von Zeitpunkten**

$S := (S_n, n \in \mathbb{N}_\circ)$ **: Folge von Zahlbeträgen zu den Zeitpunkten** t_n

(T, S): Zahlungsstrom

$r = 1 + i$ **: Aufzinsungsfaktor**

$v = \dfrac{1}{1+i}$ **: Diskontierungsfaktor**

S_n **: Zahlbetrag zum Zeitpunkt** t_n $(S_n \in \mathbb{R})$

$v^{t_n} S_n$ **: Wert des Zahlbetrags** S_n **zum Zeitpunkt 0 (Stichtag)**

1.3.1 Der Erfüllungsbetrag einer Verpflichtung

$b = \sum_n v^{t_n} S_n$: Finanzmath. Barwert des Zahlungsstroms (T, S) zum Stichtag

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

U : Zufallsgröße „Ungewisse Verpflichtung"

B : Zufallsgröße „Erfüllungsbetrag einer Verpflichtung"

Eine ungewisse Verpflichtung U ist extensional definiert durch die Menge ihrer Realisierungen

$$u_m := (T^{(m)}, S^{(m)}), m = 1, 2, \dots,$$

der Menge aller möglichen Zahlungsströme, die zur Erfüllung der Verpflichtung führen, und durch ihre Verteilung P_U gemäß $P_U(u_m) := P\{U = u_m\}$, $m = 1, 2, \dots$.

1.3.1 Der Erfüllungsbetrag einer Verpflichtung

Der Erfüllungsbetrag B einer ungewissen Verpflichtung ist extensional definiert durch die Menge seiner Realisierungen

$$b_m := \sum_n v^{t_n^{(m)}} S_n^{(m)},\ m = 1, 2, \ldots,$$

der finanzmathematischen Barwerte der ungewissen Verpflichtung $((T^{(m)}, S^{(m)}), m = 1, 2, \ldots)$, und durch seine Verteilung P_B gemäß $P_B(b_m) := P\{B = b_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$

<u>Bewertungsprinzipien zur Bildung einer Rückstellung</u>

"Prinzip des vorsichtigen Kaufmanns"

Rückstellung $\mathcal{R}$ gemäß $P\{B > \mathcal{R}\} \leq \alpha$ f. geeignet gewähltes α

1.3.1 Der Erfüllungsbetrag einer Verpflichtung

"Erwartungswertprinzip"

Rückstellung $\mathcal{R} = b := \mathcal{E}B$

Berechnung der Rückstellung einer ungewissen Verpflichtung:

1. **Bestimmung der Zahlungsströme $(T^{(m)}, S^{(m)}), m = 1, 2, \ldots$ der ungewissen Verpflichtung (Realisierungen dieser Zufallsgröße)**
2. **Berechnung der Realisierungen $b_m = \sum_{k \geq 0} v^{t_k^{(m)}} S_k^{(m)}, m = 1, 2, \ldots$ des Erfüllungsbetrags B der ungewissen Verpflichtung**
3. **Berechnung der Verteilung P_B des Erfüllungsbetrags gemäß $P_B(b_m) := P\{B = b_m\}, m = 1, 2, \ldots$**
4. **Berechnung der Rückstellung nach einem geeigneten Bewertungsprinzip**

1.3.1 Erwartungswert und Varianz des Erfüllungsbetrags einer Verpflichtung

Erwartungswert:

$$b \;:=\; \mathcal{E}B = \sum_m b_m\, P_B(b_m) = \sum_m b_m\, P\{B = b_m\}$$

2. Moment von B:

$$\mathcal{E}(B^2) \;=\; \sum_m b_m^2\, P_B(b_m)$$

Varianz gem. Verschiebungssatz:

$$var(B) \;=\; \mathcal{E}(B^2) - (\mathcal{E}B)^2$$

1.3.1.1 Beispiel: Lebenslängliche Todesfallversicherung

Szenario: Zahlung eines Betrags 1 nach $m+1$ Jahren ($m \in \mathbb{N}_0$) an einen jetzt x-jährigen

$$T^{(m)} = \mathbb{N}_0$$

$$S^{(m)} \quad \text{gem. } S_n^{(m)} \begin{array}{l} = 1 \text{ für } n = m+1, \\ = 0 \text{ sonst} \end{array}$$

$$(T^{(m)}, S^{(m)})$$

Mögliche Szenarien:

$$\begin{aligned} T^{(m)} &= \mathbb{N}_0 \ \forall\ m \\ S_n^{(0)} &= 1 \text{ für } n = 1 \\ &= 0 \text{ sonst (Tod im 1. Jahr)} \\ S_n^{(1)} &= 1 \text{ für } n = 2 \\ &= 0 \text{ sonst (Tod im 2. Jahr, d.h. nach 1 vollendeten Jahr)} \\ S_n^{(m)} &= 1 \text{ für } n = m+1 \\ &= 0 \text{ sonst, } m = 0, 1, \ldots \text{ (Tod nach m vollendeten Jahren)} \end{aligned}$$

1.3.1.1 Beispiel: Lebenslängliche Todesfallversicherung

$$
\begin{aligned}
u_m &= (T^{(m)}, S^{(m)}) = (\mathbb{N}_0, S^{(m)}),\ m = 0, 1, \ldots \\
b_m &= \sum_{n \geq 0} v^n S_n^{(m)} = v^{m+1},\ m = 0, 1, \ldots \\
N &: \ \text{Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod} \\
B &= v^{N+1} \\
P_B(b_m) &= P\{B = v^{m+1}\} \\
&= P\{v^{N+1} = v^{m+1}\} \\
&= P\{N = m\} \\
&= {}_m p_x \, q_{x+m} \\
\mathcal{E}B &= \sum_{m \geq 0} b_m \, P_B(b_m) \\
&= \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \, P\{N = m\} \\
&= \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \, {}_m p_x \, q_{x+m} \\
&= A_x = A_x(v) \quad \text{in üblicher versicherungsmath. Schreibweise}
\end{aligned}
$$

1.3.1.1 Beispiel: Lebenslängliche Todesfallversicherung

$$\begin{aligned}
var(B) &= \mathcal{E}(B^2) - (\mathcal{E}B)^2 \text{ (Verschiebungssatz)} \\
\mathcal{E}(B^2) &= \sum_{m\geq 0} b_m^2 \, P_B(b_m) \\
&= \sum_{m\geq 0} (v^2)^{m+1} \, P\{N = m\} \\
&= \sum_{m\geq 0} (v^2)^{m+1} \, {}_m p_x \, q_{x+m} \\
&= A_x(v^2) \\
\Longrightarrow & \\
var(B) &= var(v^{N+1}) \\
&= A_x(v^2) - A_x^2(v)
\end{aligned}$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

Verpflichtung: **Zahlung einer m vollendete Jahre laufenden jährlich vorschüssig zahlbaren Rente an einen jetzt x-jährigen bei Tod nach m vollendenten Jahren**

Mögliche Szenarien:

$$
\begin{aligned}
T^{(m)} &= \mathbb{N}_0 \;\forall\; m \\
S_n^{(0)} &= 1 \text{ für } n = 0, \\
&= 0 \text{ sonst (Tod im 1. Jahr)} \\
S_n^{(1)} &= 1 \text{ für } n = 0, 1, \\
&= 0 \text{ sonst (Tod im 2. Jahr, d.h. nach 1 vollendeten Jahr)} \\
S_n^{(m)} &= 1 \text{ für } n = 0, 1, \ldots, m, \\
&= 0 \text{ sonst, } m = 0, 1, \ldots \text{ (Tod nach } m \text{ vollendeten Jahren)}
\end{aligned}
$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

$$
\begin{aligned}
u_m &= (T^{(m)}, S^{(m)}) = (\mathbb{N}_0, S^{(m)}) \\
b_m &= \sum_{n \geq 0} v^n S_n^{(m)} \\
&= \sum_{n=0}^{m} v^n \\
&= a_{\overline{m+1}|} \\
N &: \text{ Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod} \\
B &= a_{\overline{N+1}|} \\
P_B(b_m) &= P\{B = a_{\overline{m+1}|}\} \\
&= P\{a_{\overline{N+1}|} = a_{\overline{m+1}|}\} \\
&= P\{N = m\} \\
&= {}_m p_x \, q_{x+m}
\end{aligned}
$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{m \geq 0} b_m \, P_B(b_m) \\
&= \sum_{m \geq 0} a_{\overline{m+1}|} \, P\{N = m\} \\
&= \sum_{m \geq 0} a_{\overline{m+1}|} \; {}_m p_x \, q_{x+m}
\end{aligned}
$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

<u>**Exkurs: Darstellung diskreter Zufallsgrößen**</u>

$\boldsymbol{\Omega, \ A \ \subset \ \Omega}$

Indikatorfunktion:
$\boldsymbol{1_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}}$ **gemäß**

$$\boldsymbol{1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & f. \quad \omega \in A \\ 0 & f. \quad \omega \notin A \end{cases}}$$

$\boldsymbol{(\Omega, \mathcal{A}, P), A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{E} 1_A = P(A)}$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

Kanonische Darstellung der Zufallsgröße B mit den Realisierungen $b_m, m = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{m \geq 0} b_m \, 1_{\{B=b_m\}} \\ \Rightarrow \mathcal{E}B &= \sum_{m \geq 0} b_m \, \mathcal{E}(1_{\{B=b_m\}}) \\ &= \sum_{m \geq 0} b_m \, P\{B = b_m\} \end{aligned}$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

Alternative Darstellung von B:

$$
\begin{aligned}
B &= a_{\overline{N+1|}} \\
&= \sum_{n=0}^{N} v^n \\
&= \sum_{n\geq 0} v^n \, 1_{\{N\geq n\}}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{n\geq 0} v^n \, P\{N \geq n\} \\
&= \sum_{n\geq 0} v^n \, {}_n p_x \\
&= a_x \text{ in gewohnter Darstellung}
\end{aligned}
$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

Berechnung der Varianz von B:

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{n=0}^{N} v^n \\
&= \frac{1 - v^{N+1}}{1 - v} \\
&= \frac{1}{d} - \frac{v^{N+1}}{d} \\
\Longrightarrow \\
var(B) &= \frac{1}{d^2} var(v^{N+1}) \\
&= \frac{1}{d^2} \left[A_x(v^2) - A_x^2(v)\right]
\end{aligned}$$

1.3.1.2 Beispiel: Lebenslängliche jährlich vorschüssig zahlbare Rente

Bem.: $\boldsymbol{B = \frac{1}{d}(1 - v^{N+1})}$

Es folgt der inseressante Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}B = \mathbf{a}_x = \frac{1}{d}(1 - \mathcal{E}v^{N+1}) = \frac{1}{d}(1 - A_x)}$$

1.3.1.3 Beispiel: Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich lfd. Invalidenrente

Aktivenbestand

$M := [X_1] - x$: **Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität**

$N := [X_2] - x$: **Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod**

Zur Erinnerung:

$a \in \mathbb{R}$, $[a] := c \in \mathbb{Z} : c \leq a, c + 1 > a$ **(Gauß-Klammer).**

Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich lfd. Invalidenrente:

$$B = v^{M+1} a_{\overline{N-M|}} \, 1_{\{N>M\}}$$

1.3.1.3 Beispiel: Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich lfd. Invalidenrente

Seien $b_{mn}, m, n \geq 0$ die Realisierungen von B:

$$\begin{aligned} b_{mn} &= v^{m+1}\, a_{\overline{n-m}|} \text{ f. } n > m \\ &= 0 \quad \text{f.} \quad n \leq m \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

1.3.1.3 Beispiel: Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich lfd. Invalidenrente

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} b_{mn}\, P\{B = b_{mn}\} \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1}\, a_{\overline{n-m|}}\, P\{M = m, N = n\} \\
\mathcal{E}(B^2) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} b_{mn}^2\, P\{B = b_{mn}\} \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} (v^{m+1}\, a_{\overline{n-m|}})^2\, P\{M = m, N = n\} \\
var(B) &= \mathcal{E}(B^2) - (\mathcal{E}B)^2 \quad \text{(Verschiebungssatz)}
\end{aligned}
$$

1.3.1.3 Beispiel: Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich lfd. Invalidenrente

Der Erwartungswert $\mathcal{E}B$ lässt sich berechnen und führt zu dem Ergebnis:

$$\mathcal{E}B = \mathbf{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{z-x-1} v^{k+1}\; {}_k p_x^a \; p_{x+k}^{ai} \; \mathbf{a}_{x+k+1}^{i} \text{ mit } z : \text{Pensionsalter}$$

(Für Interessierte: vgl. Aufgabe 1 Spezialwissen PensVM 2006)

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

M: **Restliche vollendete Lebensjahre eines x-jährigen Mannes**

N: **Restliche vollendete Lebensjahre der y-jährigen Ehefrau**

(M, N unabhängig: in der Praxis übliche, jedoch keine notwendige Voraussetzung!)

Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente nach der individuellen Methode:

$$B = v^{M+1} a_{\overline{N-M|}} \, 1_{\{N>M\}}$$

$\Longrightarrow$

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

$$\mathcal{E}B = \sum_{m,n \geq 0} b_{mn} \, P\{M = m, N = n\}$$

mit $b_{mn}, m, n \geq 0$: Realisierungen von B gemäß

$$\begin{aligned} b_{mn} &= v^{m+1} \, a_{\overline{n-m}|} \text{ f. } n > m \\ &= 0 \quad \text{f.} \quad n \leq m \end{aligned}$$

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

Es folgt:

$$\mathcal{E}B = \sum_{m\geq 0} \sum_{n>m} v^{m+1}\, a_{\overline{n-m}|}\, P\{M=m, N=n\}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{m=0}^{n-1} v^{m+1}\, a_{\overline{n-m}|}\, P\{M=m, N=n\}$$

Wir definieren:
q_x^M: einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes
$\Longrightarrow$

$$P\{M=m\} = P\{M<m+1|M\geq m\}P\{M\geq m\} = {}_m p_x^M\, q_{x+m}^M$$

mit

$${}_m p_x^M = \frac{l_{x+m}^M}{l_x^M} = \prod_{j=0}^{m-1} p_{x+1}^M = \prod_{j=0}^{m-1}(1-q_{x+j}^M)$$

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

q_y^W: einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer y-jährigen Frau

$\Longrightarrow$

$$P\{N \geq n\} = {}_np_y^W$$

mit

$$ {}_np_y^W = \frac{l_{y+n}^W}{l_y^W} = \prod_{j=0}^{n-1} p_{y+j}^W = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{y+1}^W)$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{E}B = \sum_{m\geq 0} \sum_{n>m} v^{m+1} a_{\overline{n-m}|} P\{N = n\} P\{M = m\}, \text{ da } M, N \text{unabhängig}$$

$$= \sum_{m\geq 0} v^{m+1} \left(\sum_{n>m} a_{\overline{n-m}|} P\{N = n\} \right) P\{M = n\}$$

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

$$\sum_{n>m} a_{\overline{n-m}|} P\{N=n\} = \sum_{n>m} \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k P\{N=n\}$$

$$= \sum_{k\geq 0} v^k \underbrace{\sum_{n\geq m+k+1} P\{N=n\}}$$

$$P\{N \geq m+k+1\} = {}_{m+k+1}p_y^W = {}_{m+1}p_y^W \, {}_k p_{y+m+1}^W$$

$$= {}_{m+1}p_y^W \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_k p_{y+m+1}^W$$

$$= {}_{m+1}p_y^W \, a_{y+m+1}^W$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{E}B = \sum_{m\geq 0} v^{m+1} \, {}_m p_x^M \, q_{m+m}^M \, {}_{m+1}p_y^W \, a_{y+m+1}^W$$

$$= a_{xy}^{gw} \text{ od. } a_{xy}^{rw} \text{ od. } a_{xy}^{iw} \text{ (Vgl. Aufg. 1 GW PenVM 2005)}$$

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

Auf $\{N > M\}$ gilt:

$$\begin{aligned} B = v^{M+1} a_{\overline{N-M}|} &= v^{M+1} \sum_{k=0}^{N-M-1} v^k \\ &= \sum_{k=M+1}^{N} v^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} v^k - \sum_{k=0}^{M} v^k \\ &= a_{\overline{N+1}|} - a_{\overline{M+1}|} \end{aligned}$$

Da auf $\{N \leq M\}$ $B = 0$ gilt, lässt sich B darstellen gemäß

$$\begin{aligned} B &= a_{\overline{N+1}|} - min(a_{\overline{N+1}|}, a_{\overline{M+1}|} \\ &= a_{\overline{N+1}|} - a_{\overline{min(M,N)+1}|} \end{aligned}$$

1.3.1.4 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (individuelle Methode)

Nun gilt:

$$\boldsymbol{a}_{\overline{min(M,N)+1}|} = \sum_{k=0}^{min(N,M)} v^k = \sum_{k\geq 0} v^k\, 1_{\{min(M,N)\geq k\}}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{E}\boldsymbol{a}_{\overline{min(M,N)+1}|} = \sum_{k\geq 0} v^k \underbrace{P\{min(M,N)\geq k\}}_{P\{M\geq k\}\,P\{N\geq k\}} = \sum_{k\geq 0} v^k\, {}_kp_x\, {}_kp_y$$

$= \boldsymbol{a}_{xy}$: **Barwert einer Leibrente für ein Paar bis zum 1. Todesfall (Verbundrente)**

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{E}B = \mathcal{E}\boldsymbol{a}_{\overline{N+1}|} - \mathcal{E}\boldsymbol{a}_{\overline{min(M,N)+1}|} = \boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{a}_{xy}$$

1.3.1.5 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (kollektive Methode)

$\boldsymbol{M}$ **: Restliche vollendete Lebensjahre eines x-jährigen Mannes**

$\boldsymbol{H}$ **:** $\boldsymbol{\Omega \rightarrow \{0, 1\}}$ **eine Zufallsgröße mit der Bedeutung**

H = 1, falls der Mann bei seinem Tod verheiratet ist, also eine Witwe hinterlässt,

H = 0 sonst.

1.3.1.5 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (kollektive Methode)

N : **Restliche vollendete Lebensjahre der - zu Beginn des Jahres des Todes des Mannes - $y(x+M)$-jährigen Witwe,**

Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente nach der kollektiven Methode:

$$B = v^{M+1} H a_{\overline{N}|}$$

$\Longrightarrow$

1.3.1.5 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (kollektive Methode)

$$\mathcal{E}B = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{1} b_{mnk} P\{M = m, H = k, N = n\}$$

mit $b_{mnk}, m, n \geq 0, k = 0, 1$: Realisierungen von B gemäß

$$\begin{aligned} b_{mnk} &= v^{m+1} a_{\overline{n}|} \text{ f. } m \geq 0, n \geq 1, k = 1 \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

1.3.1.5 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (kollektive Methode)

Es folgt:

$$\mathcal{E}B = \sum_{m\geq 0} \sum_{n\geq 1} v^{m+1}\, a_{\overline{n}|}\, P\{M = m, H = 1, N = n\}$$

Wir definieren:

q_x^M : einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes

q_y^W : einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer y-jährigen Frau

a_y^W : Barwert einer lebenslänglich lfd. jährlich vorschüsig zahlbaren Witwenrente vom Jahresbetrag 1

1.3.1.5 Beispiel: Anwartschaft auf eine lebenslänglich lfd. Witwenrente (kollektive Methode)

Dieser Erwartungswert lässt sich berechnen mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\mathcal{E}B &= \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\ {}_m p_x^M\ q_{x+m}^M\ h_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\ a^W_{y(x+m)+1} \\ &= a_x^{gw} \quad \text{oder} \quad a_x^{rw} \quad \text{oder} \quad a_x^{iw}\end{aligned}$$

(Für Interessierte: vgl. Aufgabe 1 Spezialwissen PensVM 2005)

1.3.1.6 Barwerte

Allgemeiner Ansatz:

Allgemeine Darstellung des Barwerts einer Verpflichtung gegenüber einer Person bei einer zusammengesetzten Ordnung von h Ausscheideursachen:

x: **Versicherungstechnisches Alter zum Beginn der Verpflichtung**

${}_kL_x^{(0)}$: **Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres ($k = 0, 1, \ldots$).**

${}_kL_x^{(i)}$: **Erwartungswert der Leistungen, die durch das Ausscheiden im Jahr $]x+k, x+k+1]$ aus der Ursache i verursacht werden, soweit sie nicht durch ${}_kL_x^{(0)}$ erfaßt sind, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres (k = 0, 1, . . .).**

1.3.1.6 Barwerte

Beispiel: Einfache Ordnung, lebenslängliche Todesfallversicherung der Summe 1, zahlbar zum Ende des Jahres des Todes:

$$_{k}L_x^{(0)} = 0 \,\forall\, k$$

$$_{k}L_x^{(1)} = v \,\forall\, k$$

Zahlbar zum Zeitpunkt des Todes:

(a) Strenge Ableitung aus Axiom 1:

$$_{k}L_x^{(1)} = \frac{\delta}{i} \,\forall\, k$$

(b) Übliche Näherung:

$$_{k}L_x^{(1)} = v^{\frac{1}{2}} \,\forall\, k$$

1.3.1.6 Barwerte

Beispiel: Aktivengesamtheit mit fester Altersgrenze z, Zusage auf Alters-, Invaliden- und Ehegattenrente, lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbar:

$$
\begin{aligned}
{}_kL_x^{(0)} &= 0 \text{ für } k < n \text{ (mit } n = z - x) \\
&= R_k\,(a_z^r + w\,a_z^{rw}) \text{ für } k = n
\end{aligned}
$$

R_k: Jahresrentenanspruch bei Eintritt des Versorgungsfalles nach k Dienstjahren.

a_z^r: Barwert eines z-jährigen Altersrentners auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente vom Jahresbetrag 1

w: Höhe der Witwenrente als Bruchteil der Berechtigtenrente

a_z^{rw}: Barwert der Anwartschaft eines z-jährigen Altersrentners auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente vom Jahresbetrag 1 (kollektive Methode)

1.3.1.6 Barwerte

$$
\begin{aligned}
{}_kL_x^{(1)} &= R_k\, v^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{a}^{i}_{x+k+\frac{1}{2}} + w\, \mathbf{a}^{iw}_{x+k+\frac{1}{2}} \right) \text{ für } k < n, \\
&= 0 \text{ für } k = n
\end{aligned}
$$

$\mathbf{a}^{i}_{x+\frac{1}{2}}$: Barwert einer im Mittel in der Mitte des Jahres $]x, x+1]$ beginnenden lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Invalidenrente vom Jahresbetrag 1 zum Alter $x + \frac{1}{2}$

$\mathbf{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2}}$: Barwert der Anwartschaft eines Invalidenrentners des Alters $x+\frac{1}{2}$ auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente vom Jahresbetrag 1 (kollektive Methode) zum Alter $x + \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
{}_k\boldsymbol{L}_x^{(2)} &= \boldsymbol{w}\, \boldsymbol{R}_k\, \boldsymbol{v}^{\frac{1}{2}}\, \boldsymbol{h}_{x+k}\, \mathbf{a}^w_{y(x+k)+\frac{1}{2}} \text{ für } \boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}, \\
&= 0 \text{ für } \boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}
\end{aligned}
$$

h_x: **Wahrscheinlichkeit einer Person, bei Tod in der Altersspanne $]x, x+1]$ verheiratet zu sein**

$y(x)$: **Alter der Witwe am Beginn des Todesjahres des Mannes bei Tod des Mannes in der Altersspanne $]x, x+1]$**

$\mathbf{a}^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$: **Barwert einer lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Witwenrente an eine Witwe mit dem Alter $y(x) + \frac{1}{2}$ vom Jahresbetrag 1**

1.3.1.6 Barwerte

<u>Allgemeiner Ansatz (Fortsetzung):</u>

$$ {}_k\hat{L}_x := {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)} q_{x+k}^{(i)}, \;\; k = 0, 1, \ldots $$

${}_k\hat{L}_x$: **Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+k, x+k+1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres**

Spezialisiert auf das Beispiel Aktivengesamtheit:

$$ \begin{aligned} {}_k\hat{L}_x &= i_{x+k}\, {}_kL_x^{(1)} + q_{x+k}^{aa}\, {}_kL_x^{(2)} \text{ für } k < n \\ &= {}_nL_x^{(0)} \text{ für } k = n. \end{aligned} $$

1.3.1.6 Barwerte

Spezialisiert auf das Beispiel Todesfallversicherung:

$$ {}_k\hat{L}_x = \sum_{i=1}^{1} {}_kL_x^{(i)}\, q_{x+k}^{(i)} = v\; q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \ldots $$

Zahlbar zum Zeitpunkt des Todes:

(a) Strenge Ableitung aus Axiom 1:

$$ {}_k\hat{L}_x = \frac{\delta}{i}\, q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \ldots $$

(b) Übliche Näherung:

$$ {}_k\hat{L}_x = v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \ldots $$

Allgemeiner Ansatz (Fortsetzung):

Barwert der Gesamtverpflichtung zum Alter x:

$$
\begin{aligned}
{}_0B_x &= \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x\, {}_k\hat{L}_x \\
{}_kp_x &= \frac{l_{x+k}}{l_x} = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j} \\
p_x &= 1 - \sum_{i=1}^{h} q_x^{(i)}
\end{aligned}
$$

Verallgemeinert auf Alter $> x$: Leistungsbarwert zum Alter $x+m$:

$$
{}_mB_x = \sum_{k\geq 0} v^k\, {}_kp_{x+m}\, {}_{m+k}\hat{L}_x, \quad m = 0, 1, \ldots
$$

1.3.1.6 Exkurs: Kommutationszahlen

Falls ${}_k\hat{L}_x = \hat{L}_{x+k}$:

$$D_x := v^x\, l_x \quad \Longrightarrow \quad v^k\, {}_kp_x = \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

$$D_x^L := D_x\, \hat{L}_x \quad \Longrightarrow \quad v^k\, {}_kp_x\, {}_k\hat{L}_x = v^k\, {}_kp_x\, \hat{L}_{x+k} = \frac{D_{x+k}^L}{D_x}$$

$${}_0B_x = \sum_{k\geq 0} v^k\, {}_kp_x\, {}_k\hat{L}_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k\geq 0} D_{x+k}^L = \frac{N_x^L}{D_x} \quad \text{mit} \quad N_x^L := \sum_{k\geq 0} D_{x+k}^L$$

$${}_mB_x = \sum_{k\geq 0} v^k\, {}_kp_{x+m}\, {}_{m+k}\hat{L}_x = \sum_{k\geq 0} v^k\, {}_kp_{x+m}\, \hat{L}_{x+m+k} = \frac{N_{x+m}^L}{D_{x+m}}$$

1.3.1.6 Barwerte

Spezialisiert auf das Beispiel Todesfallversicherung:

Zahlbar zum Ende des Jahres des Todes:

$$ {}_0B_x = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x \, {}_k\hat{L}_x = \sum_{k\geq 0} v^{k+1} {}_kp_x \, q_{x+k} $$

Zahlbar zum Zeitpunkt des Todes:

(a) Strenge Ableitung aus Axiom 1:

$$ {}_0B_x = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x \, {}_k\hat{L}_x = \sum_{k\geq 0} \frac{\delta}{i} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} $$

(b) Übliche Näherung:

$$ {}_0B_x = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x \, {}_k\hat{L}_x = \sum_{k\geq 0} v^{k+\frac{1}{2}} \, {}_kp_x \, q_{x+k} $$

1.3.1.6 Barwerte

Spezialisiert auf das Beispiel Aktivengesamtheit:

$$ {}_0B_x = \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_kp_x^a \, {}_k\hat{L}_x = \mathbf{a}_x^{aiA} + w \, \mathbf{a}_x^{aw} $$

$$ p_x^a = 1 - i_x - q_x^{aa} $$

$\mathbf{a}_x^{aiA}$: Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Alters- und Invalidenrente vom Jahresbetrag 1.

$\mathbf{a}_x^{aw}$: Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente vom Jahresbetrag 1 (gleichgültig ob bei Tod als Aktiver, Invalidenrentner oder Altersrentner)

1.3.1.6 Barwerte

$$
\begin{aligned}
{}_m\boldsymbol{B}_x &= \sum_{k=0}^{n-m} v^k \, {}_kp_{x+m} \; {}_{k+m}\hat{L}_x \\
&= \mathbf{a}_{x+m}^{aiA} + w \, \mathbf{a}_{x+m}^{aw} \text{ für } m = 0, 1, \ldots, n-1, \\
&= {}_nL_x^{(0)} \\
&= \mathbf{a}_z^{r} + w \, \mathbf{a}_z^{rw} \text{ für } m = n
\end{aligned}
$$

1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

Vorbemerkung gemischte Verzinsung

(a) **Abzinsung auf den Beginn eines Jahres: lineare Verzinsung**
Aus dem Anfangskapital K_0 bildet sich durch Verzinsung nach der Zeit $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ das Kapital K_τ (i Jahreszins):

$$K_\tau = K_0(1 + \tau i)$$

Diskontierungsfaktor $v(\tau)$ auf den Beginn des Jahres:

$$v(\tau) = \frac{1}{1 + \tau i}$$

(b) **Abzinsung auf $t = 0$ von einem bel. Zeitpunkt $t = \tau$ innerhalb eines Jahres.**

2.1 Abzinsung innerhalb des letzten Jahres von $t = \tau$ auf $t = [\tau]$ (lineare Verzinsung):

$$v(\tau - [\tau]) = \frac{1}{1 + (\tau - [\tau])i}$$

1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

2.2 Abzinsung von $t = [\tau]$ auf $t = 0$ (Zinseszins):

$v([\tau]) = v^{[\tau]}$ **mit** $v = \dfrac{1}{1+i}$ **(jährlicher Diskontierungsfaktor)**

2.3 Abzinsung von $t = \tau$ auf $t = 0$ (gemischte Verzinsung):

$$v(\tau) = \frac{v^{[\tau]}}{1 + (\tau - [\tau])i}$$

Spezialfall: $\tau = [\tau]$ (Abzinsung von Beginn = Ende eines Jahres auf $t = 0$):

$$v(\tau) = v^{\tau}$$

Also: Abzinsung auf $t = 0$ mit $v(t)$ statt mit v^t, $t \in \mathbb{R}$

1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

Barwert einer lebenslänglich laufenden, jährlich in t Raten vom Betrag $1/t$ jeweils zum Beginn des Ratenzeitraums (also *vorschüssig*) zahlbaren Rente

$$\mathbf{a}_x^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} v\left(\frac{k}{t}\right) {}_{\frac{k}{t}}p_x \overset{!}{=} \mathbf{a}_x - k^{(t)} \quad \text{(Beh!)}$$

$k^{(t)}$ ist unabhängig von x unter den Voraussetzungen:

1. **Gleichverteilung der Ausscheidezeitpunkte über das Jahr;**
2. **Zinsgutschrift am Ende des Jahres (gemischte Verzinsung);**
3. **Determinierte Fälligkeit der Renten.**

1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

Unter diesen Annahmen erhält man für $k^{(t)}$:

$$k^{(t)} = \frac{1+i}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t+\lambda i}$$

Aus dem allgemeinen Ansatz für den Barwert ergibt sich:
Barwert einer lebenslänglich $\frac{1}{t}$-vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1:

$$\mathbf{a}_x^{(t)} = \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_k p_x \, L_{x+k}^{(t)}$$

$L_{x+k}^{(t)}$: Barwert der Rentenzahlungen des Alters $]x+k, x+k+1]$ zum Beginn des Jahres

$$L_{x+k}^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} v\left(\frac{\lambda}{t}\right) {}_{\frac{\lambda}{t}}p_{x+k} \;=\; \frac{1}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{{}_{\frac{\lambda}{t}}p_{x+k}}{1+\frac{\lambda}{t} i} \;=\; 1 - k^{(t)} \left(1 - v p_{x+k}\right)$$

1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_x^{(t)} &= \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x L_{x+k}^{(t)} = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x \left(1 - k^{(t)} \left(1 - vp_{x+k}\right)\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x - k^{(t)} \left[\sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x - \sum_{k\geq 0} vp_{x+k} v^k {}_kp_x\right] \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x - k^{(t)} \left[\sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x - \sum_{k\geq 1} v^k {}_kp_x\right] \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x - k^{(t)} = \mathbf{a}_x - k^{(t)}
\end{aligned}$$

Bem.: $k^{(t)}$ **unabhängig von** x **:**

$$k^{(t)} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^{(t)}$$

1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

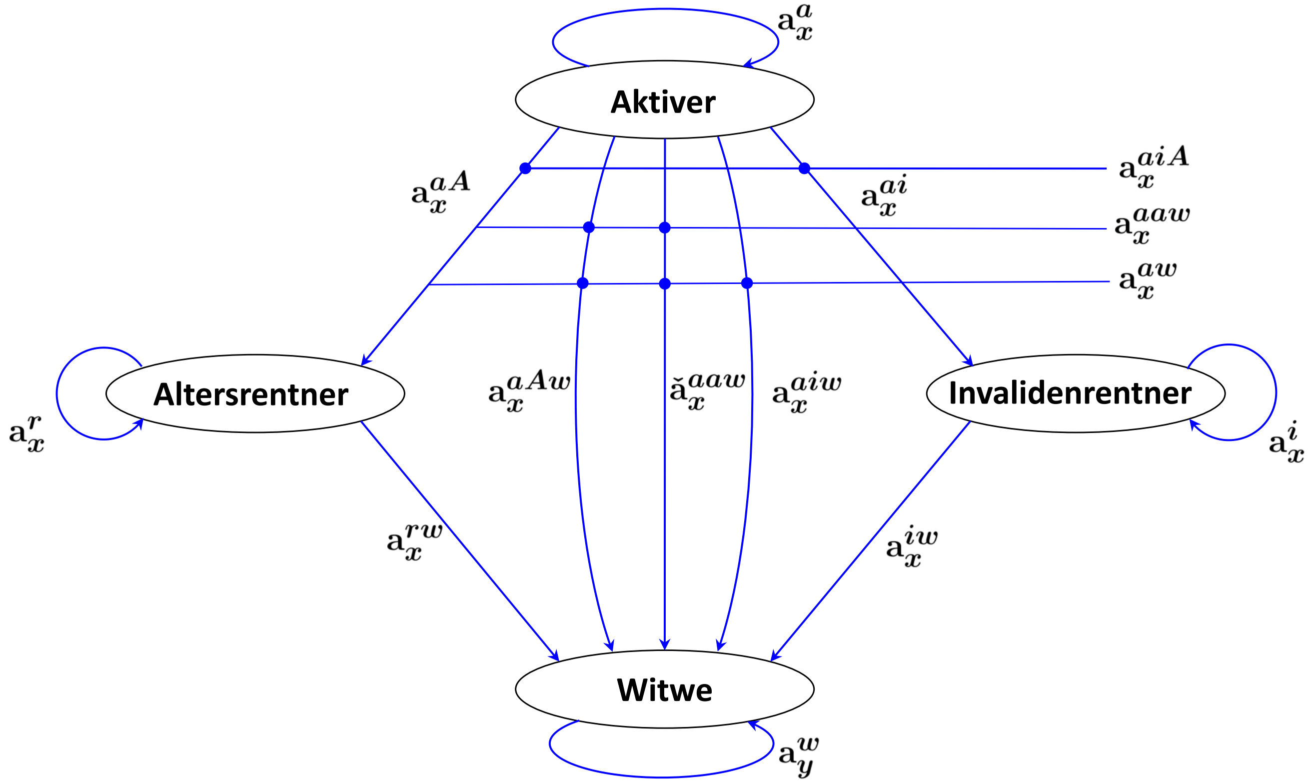
Die Bedeutung von $\boldsymbol{k}^{(t)}$

Die Größe $\boldsymbol{k}^{(t)}$ zur Berücksichtigung unterjährlicher Zahlungen hat im Modell des Axiomensystems der Pensionsversicherungsmathematik eine ganz unmittelbare Bedeutung: Wird bei 1/t-vorschüssiger Zahlunsweise durch Eintritt eines zufälligen Ereignisses mit Gleichverteilung des Ereigniszeitpunktes innerhalb eines Jahres z.B. durch Eintritt der Invalidität eine laufende Rente der Höhe 1/t pro Zahlungsabschnitt ausgelöst, die bis zum Ende des Jahres läuft, dann stellt $\boldsymbol{k}^{(t)}$ den Erwartungswert der innerhalb dieses Jahres gezahlten und auf das Ende des Jahres aufgezinsten Rentenraten dar. Das gilt also unter der Voraussetzung, dass die Zufallsgröße „Zeitpunkt des Eintritts des auslösenden Ereignisses“ innerhalb des Jahres gleichverteilt ist, und die Rentenraten bis zum Ende des Jahres laufen.

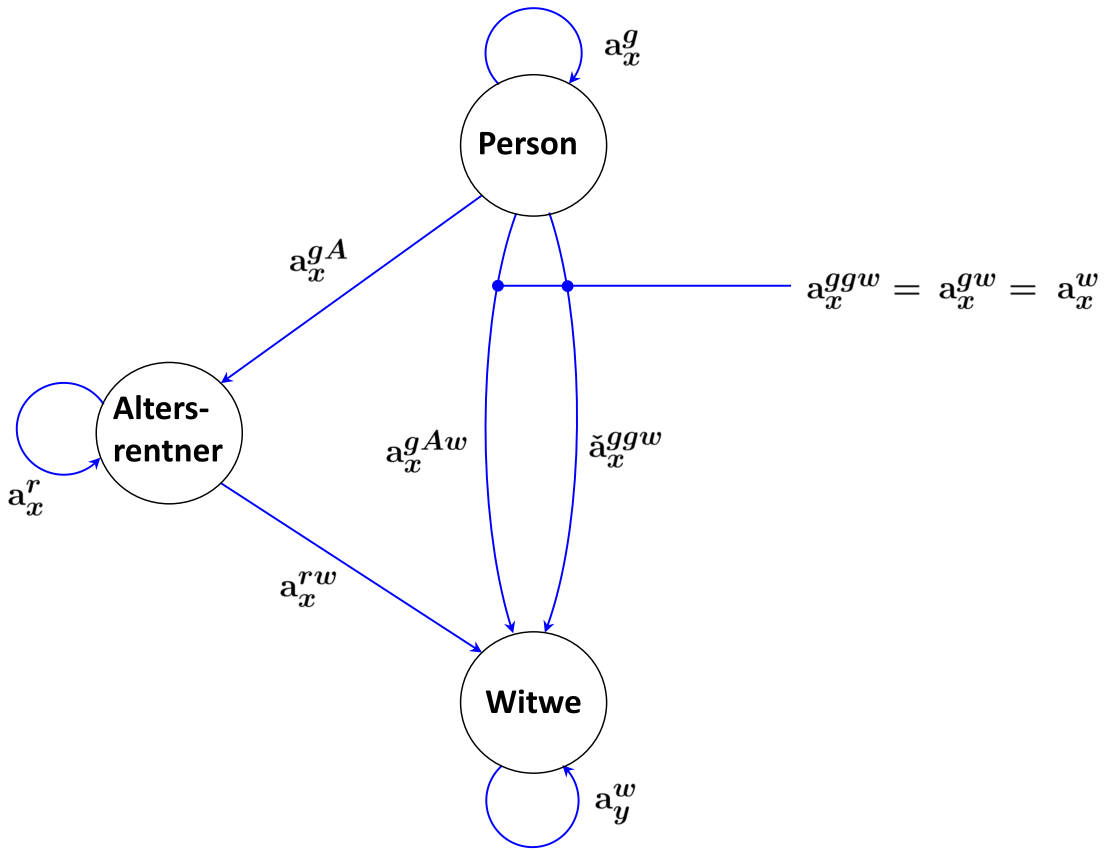
1.3.1.7 Barwerte bei unterjährlicher Zahlungsweise

Das ist nun gewährleistet, wenn die Rentenraten durch Ausscheiden aus einem Bestand, dem der Berechtigte zum Beginn des Jahres angehört hat, ausgelöst werden, und im gleichen Jahr kein weiterer Übergang erfolgt (Einfachübergang). Das ist aber auch bei Mehrfachübergängen durch das f.s. Zusammenfallen der Übergangszeitpunkte bei Mehrfachübergängen auf einen Zeitpunkt gewährleistet. Denn zum einen ist der auslösende Zeitpunkt als Zeitpunkt des letzten Übergangs im Jahr gleichverteilt, und zum andern läuft die so ausgelöste Rente bis zum Ende des Jahres, weil kein weiterer Übergang erfolgt. Damit beträgt der Erwartungswert der innerhalb des Rentenbeginnjahres gezahlten und auf das Ende des Jahres aufgezinsten Rentenraten in allen Fällen, sei die Rentenzahlung durch Einfachübergänge, sei sie durch Mehrfachübergänge ausgelöst, einheitlich $\boldsymbol{k^{(t)}}$, wovon auch die RT implizit ausgehen (vgl. insbesondere die Formel für $\boldsymbol{{}^{(t)}a_x^{aiw}}$).

1.3.1.8 Barwerte auf Basis der Aktivenausscheideordnung (Aktivenbestand)



1.3.1.8 Barwerte auf Basis der Aktivenausscheideordnung (Gesamtbestand)



1.3.1.8 Barwerte auf Basis der Aktivenausscheideordnung

Vorbemerkung: Die folgenden Barwerte sind für Rentenansprüche von jährlich 1 normiert.

Für einen beliebigen Rentenvektor erhält man wie folgt den Barwert:

$R_k, k = 0, 1, \ldots, n$ **(beliebiger Rentenvektor)**

$\sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x \, L_{x+k}$ **: Barwert für Rentenansprüche von jährlich 1**

$\sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x \, R_k \, L_{x+k}$ **: Barwert für beliebigen Rentenvektor**

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert des Anspruchs eines Rentners vom Jahresbetrag 1, lebenslänglich vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}a_x^r &= \sum_{k \geq 0} v^k \; {}_kp_x^r \; {}^{(t)}L_{x+k}^r = a_x^r - k^{(t)}, \qquad x \geq z \\
{}^{(t)}L_x^r &= 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^r), \qquad x \geq z \\
p_x^r &= 1 - q_x^r
\end{aligned}
$$

Analog: ${}^{(t)}a_x^g$, ${}^{(t)}a_x^i$, ${}^{(t)}a_y^w$

Bem.: Bei Anwendung einer Generationensterbetafel erhalten wir

$$
{}^{(t)}a_x^r(g) = \sum_{k \geq 0} v^k \; {}_kp_x^r(g) \; {}^{(t)}L_{x+k}^r(g) = a_x^r(g) - k^{(t)},
$$

also pro Geburtsjahrgang die oben angegebene Formel.

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert des Anspruchs eines Aktiven des Alters x auf eine über die Aktivenzeit laufende Rente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. (Aktivenrentenbarwert):

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}\mathbf{a}_x^a &= \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}^{(t)}L_{x+k}^a = \mathbf{a}_x^a - k^{(t)}(1 - v^n \; {}_np_x^a)\,, \; x \leq z \\
{}^{(t)}L_x^a &= \begin{cases} 1 - k^{(t)}(1 - vp_x^a) & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} \\
p_x^a &= 1 - i_x - q_x^{aa} \\
n &= z - x \qquad \text{mit} \qquad z = \text{Schlußalter für Aktive}
\end{aligned}
$$

Analog für andere abgekürzte Renten z.B.: ${}^{(t)}a_{x,\overline{n|}}^g$, ${}^{(t)}a_{x,\overline{n|}}^i$, ${}^{(t)}a_{y,\overline{n|}}^w$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{ai} &= \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_k p_x^a \; {}^{(t)}L_{x+k}^{ai} \;=\; \mathbf{a}_x^{ai}, \qquad x \le z \\
{}^{(t)}L_x^{ai} &= \begin{cases} i_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathbf{a}_{x+\frac{1}{2}}^i & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases} \\
{}^{(t)}\mathbf{a}_{x+\frac{1}{2}}^i &= v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \; \mathbf{a}_{x+1}^i
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
{}^{(t)}L_x^{ai} = i_x \, v \, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \, \mathbf{a}_{x+1}^i = i_x \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} p_x^i} \, \mathbf{a}_{x+1}^i \quad \text{für} \quad x < z
$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Invarianzsatz: **Auf der Basis des Axiomensystems hängen Anwartschaftsbarwerte von Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe nicht von der Zahlungsweise ab, wenn sowohl der Zeitpunkt des die Rente auslösenden Ereignisses als auch der Zeitpunkt des die Rente beendigenden Ereignisses innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind.**

$\boldsymbol{k^{(t)}}$: **Wert der im Jahr des Rentenbeginns fälligen Rentenraten zum Ende des Jahres.**

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Altersrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. (wenn also die Altersgrenze als Aktiver erreicht wird):

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aA} &= \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}^{(t)}L_{x+k}^{aA} = v^n \; {}_np_x^a \; {}^{(t)}\mathbf{a}_z^r , \qquad x \leq z \\
{}^{(t)}L_x^{aA} &= \begin{cases} 0 & \text{für } x < z \\ {}^{(t)}\mathbf{a}_z^r & \text{für } x = z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Alters- und Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$
{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aiA} = {}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aA} + {}^{(t)}\mathbf{a}_x^{ai}
$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{rw} &= \sum_{k \geq 0} v^k \; {}_kp_x^r \; {}^{(t)}L_{x+k}^{rw} = \mathbf{a}_x^{rw}, \qquad x \geq z \\
{}^{(t)}L_x^{rw} &= q_x^r \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathbf{a}^w_{y(x)+\frac{1}{2}}, \qquad x \geq z \\
{}^{(t)}\mathbf{a}^w_{y+\frac{1}{2}} &= v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}} \; \mathbf{a}^w_{y+1}
\end{aligned}
$$

Analog: ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{gw}$, ${}^{(t)}\mathbf{a}_x^{iw}$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Generationentafel: Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x mit Geburtsjahrgang g auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. nach der Kollektivmethode:

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}\mathrm{a}_x^{rw}(g) &= \sum_{k\geq 0} v^k \; {}_kp_x^r(g) \; {}^{(t)}L_{x+k}^{rw}(g) \\
&= \mathrm{a}_x^{rw}(g)\,, \qquad x \geq z \quad \text{mit} \\
{}_kp_x^r(g) &= \frac{l_{x+k}^r(g)}{l_x^r(g)} = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}^r(g) \\
{}^{(t)}L_x^{rw}(g) &= q_x^r(g) \; h_x(g) \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y(g,x)+\frac{1}{2}}(g + x - y(g,x)) \\
{}^{(t)}\mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}}(g') &= v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}}(g') \; \mathrm{a}^w_{y+1}(g'), \quad g' = g + x - y(g,x)
\end{aligned}
$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x und seines Ehegatten des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Individualmethode:

$$ {}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{rw} = \sum_{k \geq 0} v^k \; {}_k p_x^r \; {}_k p_y^g \; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{rw} = \mathbf{a}_{xy}^{rw} $$

$$ {}^{(t)}L_{xy}^{rw} = q_x^r \; {}_{\frac{1}{2}}p_y^g \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathbf{a}_{y+\frac{1}{2}}^{w} $$

$$ {}^{(t)}\mathbf{a}_{y+\frac{1}{2}}^{w} = v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^{w} \; \mathbf{a}_{y+1}^{w} $$

Analog: ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{gw}$, ${}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{iw}$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Generationentafel: Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x mit Geburtsjahrgang g und seines Ehegatten des Alters y mit Geburtsjahrgang g' auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Individualmethode:

$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{rw}(g,g') &= \sum_{k\geq 0} v^k \;\; {}_k p_x^r(g) \;\; {}_k p_y^g(g') \;\; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{rw}(g,g') \;\; = \;\; \mathbf{a}_{xy}^{rw}(g,g') \\
{}^{(t)}L_{xy}^{rw}(g,g') &= q_x^r(g) \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_y^g(g') \;\; v^{\frac{1}{2}} \;\; {}^{(t)}\mathbf{a}_{y+\frac{1}{2}}^{w}(g') \\
{}^{(t)}\mathbf{a}_{y+\frac{1}{2}}^{w}(g') &= v^{\frac{1}{2}} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^{w}(g') \;\; \mathbf{a}_{y+1}^{w}(g')
\end{aligned}
$$

Fazit: problemlos!

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}\check{\mathbf{a}}_x^{aaw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}^{(t)}\check{L}_{x+k}^{aaw} = \check{\mathbf{a}}_x^{aaw}, \qquad x \leq z$$

$$^{(t)}\check{L}_x^{aaw} = \begin{cases} q_x^{aa} \; h_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathbf{a}^w_{y(x)+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x und seines Ehegatten des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Individualmethode:

$$^{(t)}\check{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \;{}_k p_x^a \;{}_k p_y^g \;{}^{(t)}\check{L}_{x+k,y+k}^{aaw} = \check{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw}, \qquad x \le z$$

$$^{(t)}\check{L}_{xy}^{aaw} = \begin{cases} q_x^{aa} \;{}_{\frac{1}{2}}p_y^g \; v^{\frac{1}{2}} \;{}^{(t)}\mathbf{a}_{y+\frac{1}{2}}^{w} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. (Kollektivmethode):

$$ {}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aAw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}^{(t)}L_{x+k}^{aAw} = v^n \; {}_np_x^a \; {}^{(t)}\mathbf{a}_z^{rw} = \mathbf{a}_x^{aAw}, \quad x \le z $$

$$ {}^{(t)}L_x^{aAw} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(t)}\mathbf{a}_z^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases} $$

$$ {}^{(t)}L_x^{aaw} = {}^{(t)}\check{L}_x^{aaw} + {}^{(t)}L_x^{aAw}, \quad {}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aaw} = {}^{(t)}\check{\mathbf{a}}_x^{aaw} + {}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aAw} $$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x und seines Ehegatten des Alters y auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Individualmethode:

$$\begin{aligned} {}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aAw} &= \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}_kp_y^g \; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{aAw} \\ &= v^n \; {}_np_x^a \; {}_np_y^g \; {}^{(t)}\mathbf{a}_{z,y+n}^{rw} = \mathbf{a}_{xy}^{aAw}, \qquad x \le z \end{aligned}$$

$${}^{(t)}L_{xy}^{aAw} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < z \\ {}^{(t)}\mathbf{a}_{z,y+n}^{rw} & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

$${}^{(t)}L_{xy}^{aaw} = {}^{(t)}\check{L}_{xy}^{aaw} + {}^{(t)}L_{xy}^{aAw}, \qquad {}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aaw} = {}^{(t)}\check{\mathbf{a}}_{xy}^{aaw} + {}^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aAw}$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Invalider, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$^{(t)}a_x^{aiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}^{(t)}L_{x+k}^{aiw}, \qquad x \le z$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Der Barwert ${}^{(t)}\boldsymbol{L}^{aiw}_{x+k}$ kann in zwei Terme unterteilt werden:

1. **Der Aktive scheidet innerhalb des Intervalls $]x+k,\, x+k+1]$ wegen Invalidität aus der Aktivengesamtheit aus und überlebt im Invalidenbestand bis zum Ende des Intervalls:**

$$p^{ai}_x\, v\, {}^{(t)}\mathbf{a}^{iw}_{x+1} = p^{ai}_x\, v\, \mathbf{a}^{iw}_{x+1} = v\, i_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+\frac{1}{2}}\ \mathbf{a}^{iw}_{x+1}$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

2. Der Aktive scheidet innerhalb des Intervalls $]x+k,\, x+k+1]$ wegen Invalidität aus der Aktivengesamtheit und stirbt in der verbeibenden Zeit bis zum Ende des Intervalls als Invalider unter Hinterlassung einer Witwe, die das Ende des Jahres erlebt:

$$v\, p_x^{aiw}\, (k^{(t)} + {}^{(t)}\mathbf{a}_{y(x)+1}^{w}) = v\, p_x^{aiw}\, \mathbf{a}_{y(x)+1}^{w}$$

Aus den Annahmen der RT folgt, wie gezeigt:

$$p_x^{aiw} = \quad q_x^{ai}\ \ h_x\ \ {}_{\frac{1}{2}}p_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w}$$

mit $q_x^{ai} = i_x\ \ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i}$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Zusammenfassung:

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Invalider, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

Kollektivmethode:

$$
{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{aiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_k p_x^a \; {}^{(t)}L_{x+k}^{aiw} = \mathbf{a}_x^{aiw}, \qquad x \leq z
$$

$$
{}^{(t)}L_x^{aiw} = \begin{cases} i_x \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathbf{a}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}
$$

$$
{}^{(t)}\mathbf{a}_{x+\frac{1}{2}}^{iw} = v^{\frac{1}{2}} \left[\; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} \; \mathbf{a}_{x+1}^{iw} + {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i} \; h_x \; {}_{\frac{1}{2}}p_{y(x)+\frac{1}{2}}^{w} \; \mathbf{a}_{y(x)+1}^{w} \right]
$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Summendarstellung

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Witwenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Invalider, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

<u>Individualmethode:</u>

$$^{(t)}\mathbf{a}_{xy}^{aiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \; {}_kp_x^a \; {}_kp_y^g \; {}^{(t)}L_{x+k,y+k}^{aiw} = \mathbf{a}_{xy}^{aiw}, \qquad x \leq z$$

$$^{(t)}L_{xy}^{aiw} = \begin{cases} i_x \; {}_{\frac{1}{2}}p_y^g \; v^{\frac{1}{2}} \; {}^{(t)}\mathbf{a}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}}^{iw} & \text{für} \quad x < z \\ 0 & \text{für} \quad x = z \end{cases}$$

$$^{(t)}\mathbf{a}_{x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}}^{iw} = v^{\frac{1}{2}} \left[\; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^g \; \mathbf{a}_{x+1,y+1}^{iw} + {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^i \; {}_{\frac{1}{2}}p_{y+\frac{1}{2}}^w \; \mathbf{a}_{y+1}^w \right]$$

1.3.1.8 Barwerte der RT - Kommutationswerte

Kommutationswerte:

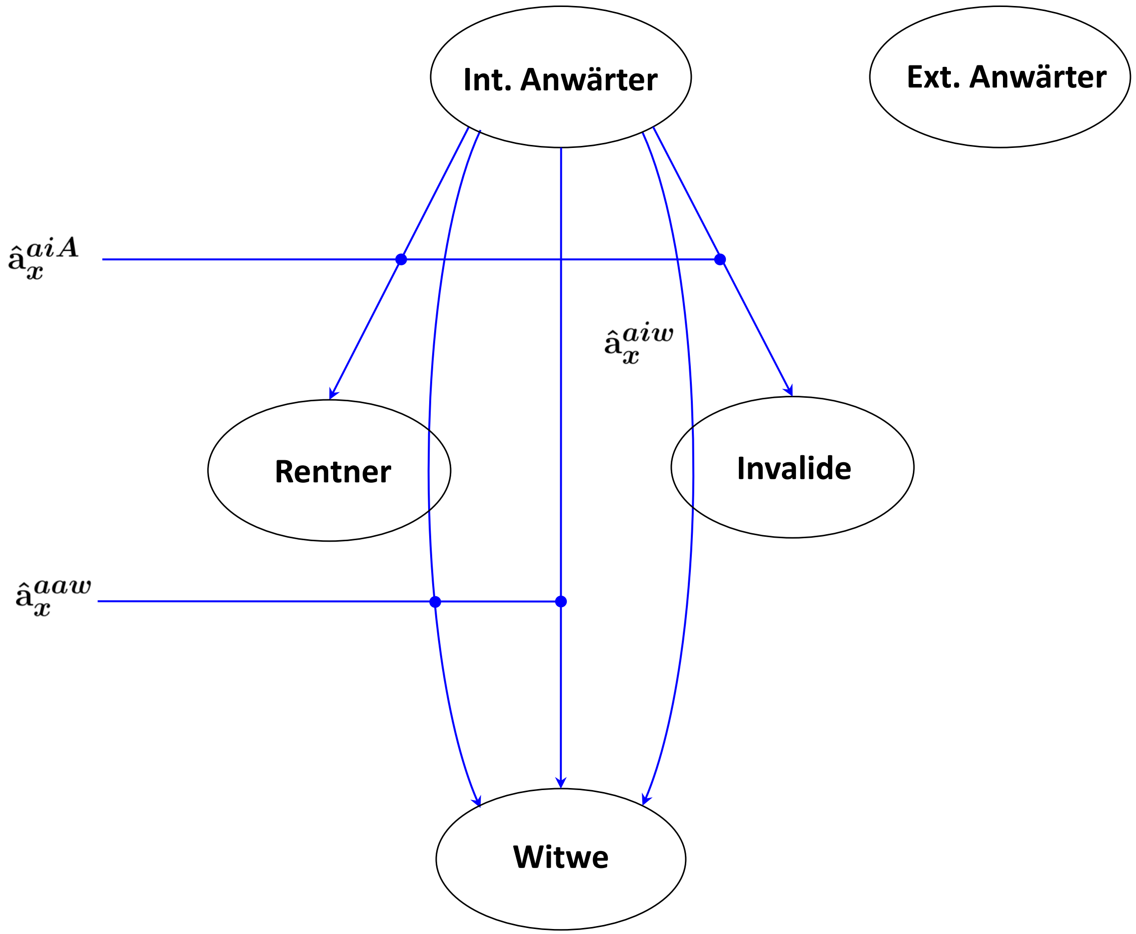
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D_x^a} &= \boldsymbol{l_x^a\, v^x} \\
\boldsymbol{D_x^i} &= \boldsymbol{l_x^i\, v^x} \\
\boldsymbol{D_x^g} &= \boldsymbol{l_x^g\, v^x} \\
\boldsymbol{D_x^r} &= \boldsymbol{l_x^r\, v^x} \\
\boldsymbol{D_x^w} &= \boldsymbol{l_x^w\, v^x}
\end{aligned}$$

1.3.2 Erw. Modell: Barwerte von internen Anwärtern

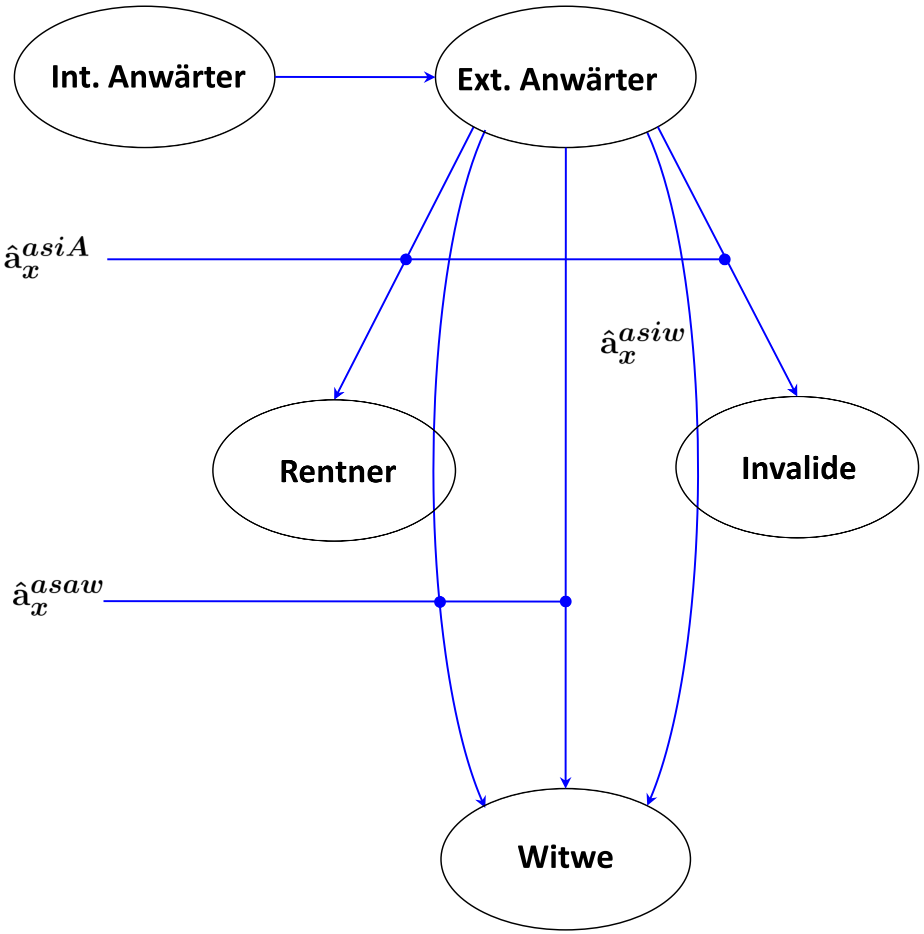
Allgemein:

$$
\begin{aligned}
{}_m\boldsymbol{B}_x &= \sum_{k=0}^{n-m} v^k \, {}_k p_{x+m} \;\; {}_{m+k}\hat{L}_x^{(t)} \\
m &= 0, 1, \ldots, n \\
n &= z - x \\
p_x &= 1 - \hat{i}_x - \hat{q}_x^{aa} - s_x \\
{}_k p_x &= \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}
\end{aligned}
$$

1.3.2 Barwerte auf Basis der des erweiterten Modells (1)

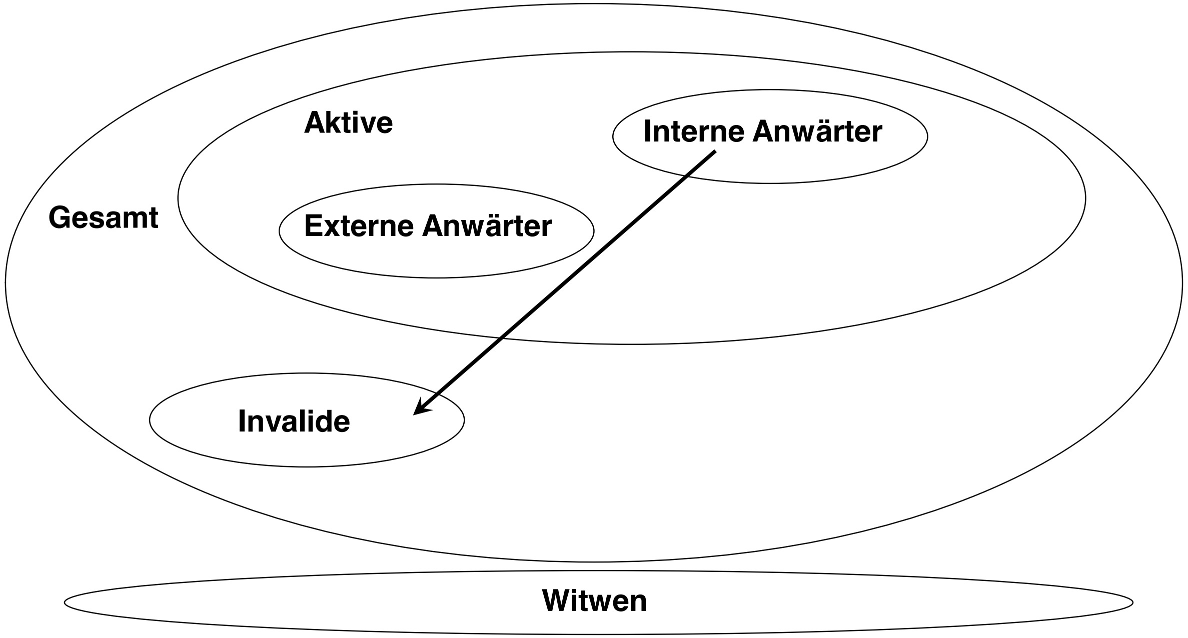


1.3.2 Barwerte auf Basis der des erweiterten Modells (2)



1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}^{aiA}_{x}$

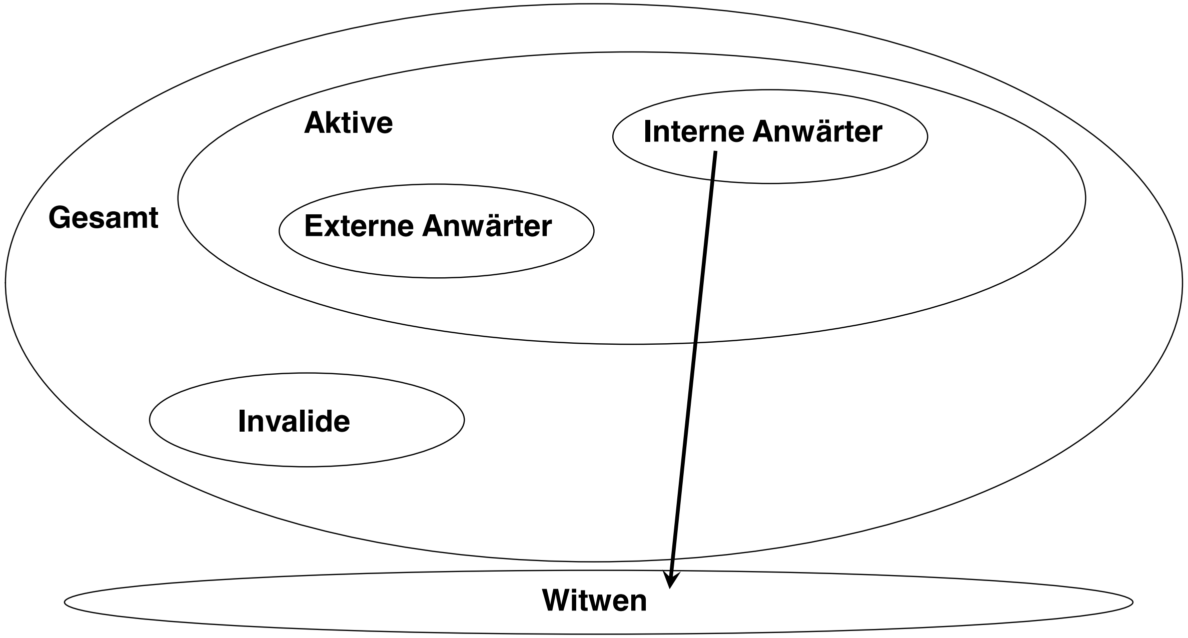
Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Invaliden- und Altersrente der Höhe 1:



$$
{}^{(t)}_{m}\hat{L}^{aiA}_{x} = \begin{cases} v\,\hat{i}_{x+m}\,{}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\left(k^{(t)} + {}^{(t)}\mathbf{a}^{i}_{x+m+1}\right) & \text{für } x+m<z \\ {}^{(t)}\mathbf{a}^{r}_{z} & \text{für } x+m=z \end{cases}
$$

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}^{aaw}_{x}$

Anwartschaft eines internen Anwärters auf auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Tod als interner Anwärter bzw. nach Erreichen der Altersgrenze:



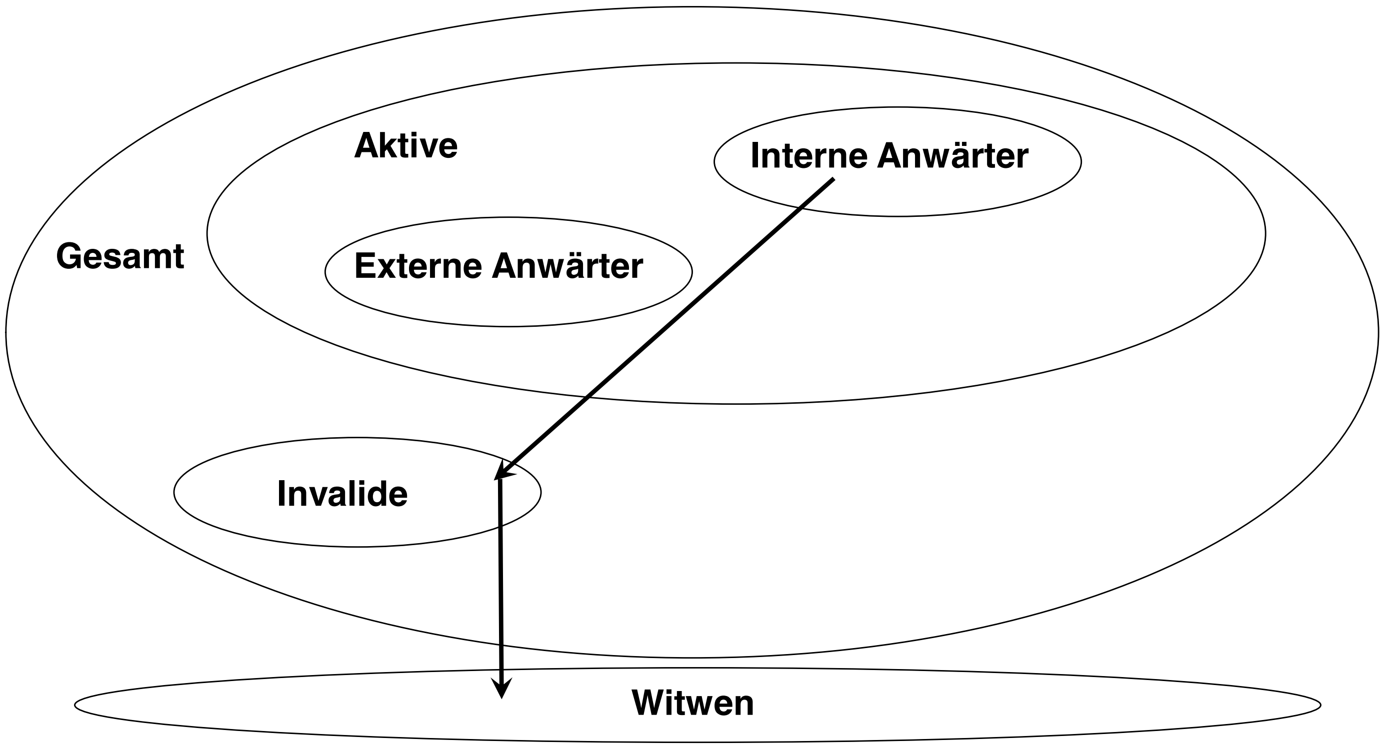
$$
{}^{(t)}_{m}\hat{L}^{aaw}_{x} = \begin{cases} v\,\hat{q}^{aa}_{x+m}\,h_{x+m}\;{}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\left(k^{(t)} + {}^{(t)}\mathbf{a}^{w}_{y(x+m)+1}\right) & \text{für} \quad x+m<z \\ {}^{(t)}\mathbf{a}^{rw}_{z} & \text{für} \quad x+m=z \end{cases}
$$

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aiw}$

Anwartschaft eines internen Anwärters auf auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Invalidentod:

Bem.: Die folgenden ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{\cdot}$ gelten für $m < n := z - x$; für $m = n$ gilt einheitlich: ${}^{(t)}_{n}\hat{L}_x^{\cdot} = 0$.

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}^{aiw}_{x}$

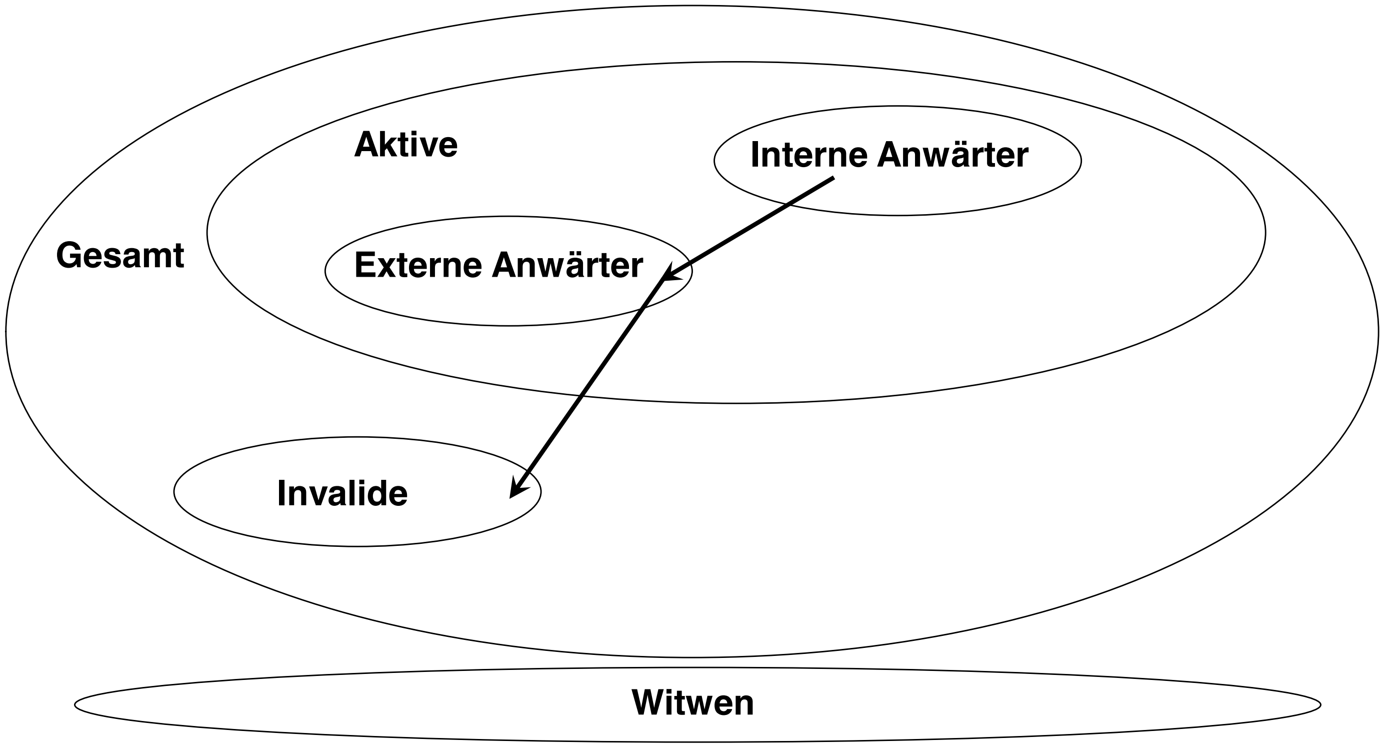


$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}_{m}\hat{L}^{aiw}_{x} &= v\,\hat{i}_{x+m}\,{}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\,{}^{(t)}a^{iw}_{x+m+1} \\
&+ v\,\hat{i}_{x+m}\,{}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\,h_{x+m}\,{}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\left(k^{(t)} + {}^{(t)}a^{w}_{y(x+m)+1}\right)
\end{aligned}
$$

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_{x}^{asiA}$

Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Invaliden- und Altersrente der Höhe 1 nach vorherigem Ausscheiden mit unverfallbarer Anwartschaft:

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{\boldsymbol{L}}^{asiA}_{x}$

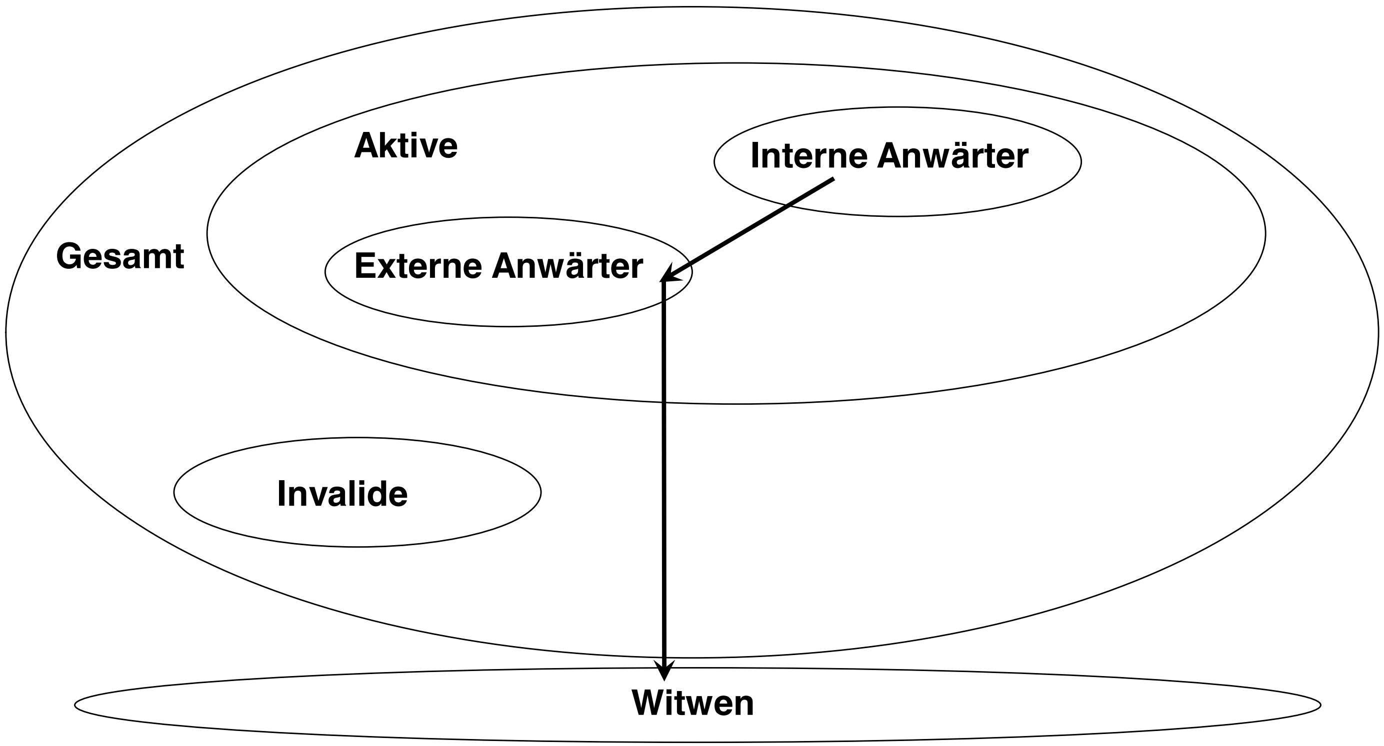


$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}_{m}\hat{\boldsymbol{L}}^{asiA}_{x} &= \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{s}_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^{a}_{x+m+\frac{1}{2}}\; {}^{(t)}\boldsymbol{a}^{aiA}_{x+m+1} \\
&+ \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{s}_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}\boldsymbol{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\, (\boldsymbol{k}^{(t)} + {}^{(t)}\boldsymbol{a}^{i}_{x+m+1})
\end{aligned}
$$

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}_{m}^{(t)}\hat{L}_{x}^{asaw}$

Die Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Aktiventod bzw. nach Erreichen der Altersgrenze nach vorherigem Ausscheiden mit unverfallbarer Anwartschaft:

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asaw}$

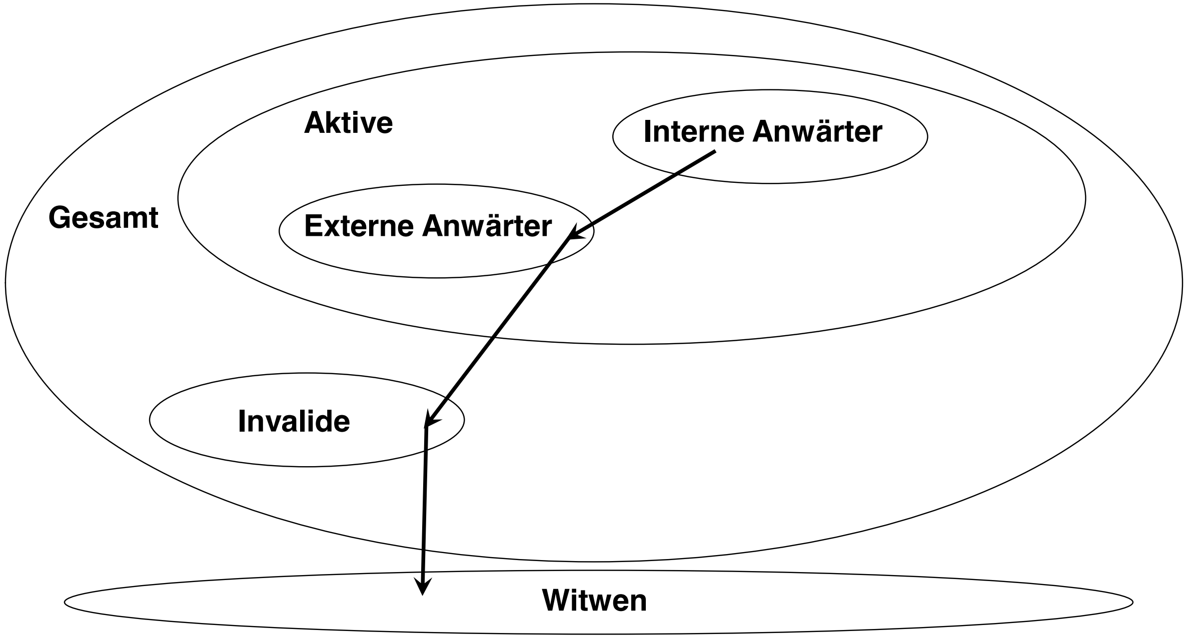


$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asaw} &= v\, s_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+m+\frac{1}{2}}\, {}^{(t)}a^{aaw}_{x+m+1} \\
&+ v\, s_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}q^{aa}_{x+m+\frac{1}{2}}\, h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \left(k^{(t)} + {}^{(t)}a^{w}_{y(x+m)+1}\right)
\end{aligned}
$$

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiw}$

Die Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Invalidentod nach vorherigem Ausscheiden mit unverfallbarer Anwartschaft:

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiw}$



$$
\begin{aligned}
{}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiw} &= v\, s_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+m+\frac{1}{2}}\, {}^{(t)}a^{aiw}_{x+m+1} \\
&+ v\, s_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}i_{x+m+\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\, {}^{(t)}a^{iw}_{x+m+1} \\
&+ v\, s_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}i_{x+m+\frac{1}{2}}\, {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\, h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\, \left(k^{(t)} + {}^{(t)}a^{w}_{y(x+m)+1}\right)
\end{aligned}
$$

1.3.2 Erweitertes Modell: ${}_m\hat{L}_x^{(t)}$

Erwartungswert der Leistungen des Wirtschaftsjahrs, diskontiert auf den Beginn des Jahres, bei einer $\frac{1}{t}$-zahlbaren Jahesrente der Höhe 1:

$$\begin{aligned} {}_m\hat{L}_x^{(t)} &= {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aiA} + {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aaw} + {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aiw} \\ &+ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiA} + {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asaw} + {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiw} \end{aligned}$$

Allgemeiner:

$$\begin{aligned} {}_m\hat{L}_x^{(t)} &= R_m^{aiA}\ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aiA} + R_m^{aaw}\ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aaw} + R_m^{aiw}\ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{aiw} \\ &+ R_m^{asiA}\ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiA} + R_m^{asaw}\ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asaw} + R_m^{asiw}\ {}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{asiw} \end{aligned}$$

Bem.: Bei feinerer Zergliederung der Rentenleistungen müssen die ${}^{(t)}_{m}\hat{L}_x^{\cdot}$ angepasst werden.

1.3.2 Standardbarwerte von internen Anwärtern

1. Barwert der Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Invaliden- und Altersrente der Höhe 1:

$$\begin{aligned} {}^{(t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{aiA} &= \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_k\hat{p}_x^a \, {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aiA} \, , \\ \hat{p}_x^a &= 1 - \hat{i}_x - \hat{q}_x^{aa} - s_x \end{aligned}$$

2. Barwert der Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Tod als interner Anwärter bzw. nach Erreichen der Altersgrenze:

$$ {}^{(t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{aaw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_k\hat{p}_x^a \, {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aaw} $$

1.3.2 Standardbarwerte von internen Anwärtern

3. **Barwert der Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Invalidentod:**

$$^{(t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{aiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_k\hat{p}_x^a \, {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aiw}$$

4. **Barwert der Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Invaliden- und Altersrente der Höhe 1 nach vorherigem Ausscheiden mit unverfallbarer Anwartschaft:**

$$^{(t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{asiA} = \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_k\hat{p}_x^a \, {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{asiA}$$

5. **Barwert der Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Aktiventod bzw. nach Erreichen der Altersgrenze nach vorherigem Ausscheiden mit unverfallbarer Anwartschaft:**

$$^{(t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{asaw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_k\hat{p}_x^a \, {}^{(t)}_{k}\hat{L}_x^{asaw}$$

6. **Barwert der Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine $\frac{1}{t}$-zahlbare Witwenrente der Höhe 1 nach Invalidentod nach vorherigem Ausscheiden mit unverfallbarer Anwartschaft:**

$$^{(t)}\hat{\mathbf{a}}_x^{asiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \, {}_k\hat{p}_x^a \, {}^{(t)}_{k}\hat{L}_x^{asiw}$$

1.3.3 Prämien - Allgemeine Darstellung

${}_k\hat{P}_x$: Erwartungswert der Prämienleistungen des Jahres $]k, k+1]$, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Beginn des Jahres ($k = 0, 1, \ldots$).

Prämienbarwert zum Alter x:

$$ {}_0B_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k \; {}_kp_x \; {}_k\hat{P}_x $$

Prämienbarwert zum Alter $x+m$:

$$ {}_mB_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k \; {}_kp_{x+m} \; {}_{k+m}\hat{P}_x, \quad m = 0, 1, \ldots $$

1.3.3 Prämien - Allgemeine Darstellung

Individuelles Äquivalenzprinzip: zum Beginn der Verpflichtung, zum Beginn des Versicherungsvertrags stimmen pro Berechtigten Barwert der zukünftigen Leistungen und Barwert der zukünftigen Prämien überein:

$$ {}_0\boldsymbol{B}_x \;=\; {}_0\boldsymbol{B}_x^P $$

$$ \sum_{k\geq 0} v^k \; {}_k p_x \left({}_k\hat{L}_x \;-\; {}_k\hat{P}_x \right) \;=\; 0 $$

$$ {}_k\hat{L}_x \;-\; {}_k\hat{P}_x \quad \text{in der Regel} \quad \neq 0 $$

1.3.3 Prämien - Allgemeine Darstellung

Spezialfall Einmalprämie:

$$ {}_0\hat{P}_x > 0 $$

$$ {}_k\hat{P}_x = 0 \text{ für } k > 0 $$

Bei individueller Äquivalenz:

$$ {}_0\hat{P}_x = {}_0B_x^P = {}_0B_x = \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x \, {}_k\hat{L}_x $$

1.3.3 Prämien - Allgemeine Darstellung

Laufende Prämien mit maximaler Laufzeit von n Jahren und jährlich gleichbleibender Höhe bei jährlich vorschüssiger Zahlungsweise:

$$ {}_mP_x = \begin{cases} P_x & \text{für} \quad m = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{für} \quad m \geq n \end{cases} $$

$$ {}_0B_x^P = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x \, P_x = P_x \, \ddot{a}_{x\overline{n}|} $$

Äquivalenzprinzip: $ {}_0B_x = {}_0B_x^P = P_x \, \ddot{a}_{x\overline{n}|} \Rightarrow P_x = \dfrac{{}_0B_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} $

$$ {}_mB_x^P = \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \, {}_kp_{x+m} \, P_x $$

$$ = P_x \, \ddot{a}_{x+m,\overline{n-m}|} \quad \text{für} \quad m = 0, 1, \ldots, n-1 $$

1.3.3 Prämien - Allgemeine Darstellung

Aktivengesamtheit mit zwei Ausscheideursachen und jährlich gleichbleibender, jährlich vorschüssiger Prämie über die Zeit als Aktiver:

$$n = z - x$$

$${}_0B_x^P = P_x \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^a = P_x \, \mathbf{a}_x^a$$

$$p_x^a = 1 - q_x^{aa} - i_x$$

Äquivalenzprinzip:

$$P_x = \frac{{}_0B_x}{\mathbf{a}_x^a}$$

$${}_mB_x^P = P_x \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \; {}_kp_{x+m}^a = P_x \, \mathbf{a}_{x+m}^a$$

1.3.3 Prämien - Aktivenausscheideordnung

Jährlich gleichbleibende, jährlich vorschüssige Prämie bis zum Eintritt des Versorgungsfalles, längstens also bis zum Pensionierungsalter z

Jährliche Prämie für die Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine Altersrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{aA} = \frac{{}^{(t)}\boldsymbol{a}_x^{aA}}{\boldsymbol{a}_x^{a}} $$

1.3.3 Prämien - Aktivenausscheideordnung

Jährlich gleichbleibende jährlich vorschüssig zahlbare Prämie für die Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{ai} = \frac{{}^{(t)}\mathbf{a}_x^{ai}}{\mathbf{a}_x^{a}} $$

Analog:

$$ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{aiA},\ {}^{(t)}\check{\boldsymbol{P}}_x^{aaw},\ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{aAw},\ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{aaw},\ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{aiw},\ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{aw} $$

1.3.3 Prämien - einfache Ordnung (Gesamtbestand)

Jährlich gleichbleibende jährlich vorschüssig zahlbare Prämie für die Anwartschaft einer Person des Gesamtbestandes des Alters $x < z$ auf eine lebenslänglich laufende Altersrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.:

$$ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{gA} = \frac{{}^{(t)}\boldsymbol{a}_x^{gA}}{\boldsymbol{a}_{x\,\overline{n}|}^{g}} $$

Analog:

$$ {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{ggw},\quad {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{gAw},\quad {}^{(t)}\boldsymbol{P}_x^{gw} $$

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

$\boldsymbol{B_x}$: **Barwert gemäß Leistungsanspruch des Berechtigten $\boldsymbol{x}$ zum Stichtag**

$\boldsymbol{V_x}$: **Deckungsrückstellung des Berechtigten $\boldsymbol{x}$ zum Stichtag**

Individuelle Prämie:

$$\boldsymbol{P_x = \frac{B_x - V_x}{a_x^a}}$$

$$\boldsymbol{\sum P_x}$$

$\boldsymbol{G_x}$: **Maßgebende Bemessungsgrundlage des Berechtigten $\boldsymbol{x}$ zum Stichtag**

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

1. Verfahren (Durchschnittsprämie)

$\bar{P}_x$ **: Prämie nach dem 1. Verfahren**

$$\sum P_x = \bar{p} \sum G_x \quad \Longrightarrow \quad \bar{p} = \frac{\sum P_x}{\sum G_x}$$

$$\bar{P}_x = \bar{p}\, G_x$$

$$\sum \bar{P}_x = \sum P_x$$

Spezialfälle:

1. Fall: $G_x = P_x \; \forall x$

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

$$\bar{p} = \frac{\sum P_x}{\sum G_x} = \frac{\sum P_x}{\sum P_x} = 1$$

$$\bar{P}_x = \bar{p}\, G_x = \bar{p}\, P_x = P_x$$

2. Fall: $G_x = 1 \, \forall x$

n **: Anzahl der Berechtigten zum Stichtag** $\Longrightarrow \sum G_x = n$

$$\bar{p} = \frac{\sum P_x}{\sum G_x} = \frac{1}{n} \sum P_x$$

$$\bar{P}_x = \bar{p}\, G_x = \bar{p} =: \bar{P}$$

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

2. Verfahren (Kollektives Äquivalenzprinzip)

Individuelles Äquivalenzprinzip: $\boldsymbol{P_x\, \mathbf{a}_x^a = B_x - V_x}$

Kollektives Äquivalenzprinzip: $\boldsymbol{\sum P_x\, \mathbf{a}_x^a = B - V}$

$$\boldsymbol{B = \sum B_x}$$

$$\boldsymbol{V = \sum V_x}$$

Prämien $\boldsymbol{\tilde{P}_x}$ **mit** $\boldsymbol{\sum \tilde{P}_x\, \mathbf{a}_x^a = B - V}$ **erfüllen das kollektive Äquivalenzprinzip**

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

$\mathbf{a}_{x_1} > \mathbf{a}_{x_2}$ **für** $x_1 < x_2$

$\Delta P_{x_1} > 0$, ΔP_{x_2} **so, dass** $\sum \tilde{P}_x\, \mathbf{a}_x^a$ **unverändert**

$$\Delta P_{x_1}\, \mathbf{a}_{x_1} + \Delta P_{x_2}\, \mathbf{a}_{x_2} = 0$$

$$\Delta P_{x_2} = -\Delta P_{x_1} \frac{\mathbf{a}_{x_1}}{\mathbf{a}_{x_2}}$$

$$|\Delta P_{x_2}| = \Delta P_{x_1} \frac{\mathbf{a}_{x_1}}{\mathbf{a}_{x_2}} > \Delta P_{x_1}$$

$\sum \tilde{P}_x$

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

$\tilde{P}_x$ **gemäß** $\tilde{P}_x = \tilde{p}\, G_x$

$$\sum \tilde{P}_x\, \mathbf{a}_x^a = \tilde{p} \sum G_x\, \mathbf{a}_x^a = B - V$$

$$\tilde{p} = \frac{B - V}{\sum G_x\, \mathbf{a}_x^a}$$

$$\sum \tilde{P}_x\, \mathbf{a}_x^a = \tilde{p} \sum G_x\, \mathbf{a}_x^a = B - V$$

Spezialfälle:

1. Fall: $G_x = P_x \ \forall x$

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

$$\tilde{p} = \frac{B - V}{\sum G_x \, \mathbf{a}_x^a} = \frac{B - V}{\sum P_x \, \mathbf{a}_x^a} = 1$$

$$\tilde{P}_x = \tilde{p}\, G_x = G_x = P_x$$

2. Fall: $G_x = 1 \, \forall x$

$$\tilde{p} = \frac{B - V}{\sum \mathbf{a}_x^a}$$

$$\tilde{P}_x = \tilde{p}\, G_x = \tilde{p} =: \tilde{P} \text{ (Technische Durchschnittsprämie)}$$

$$\sum \tilde{P} = n \, \frac{B-V}{\sum \mathbf{a}_x^a} = n \, \frac{\sum (B_x - V_x)}{\sum \mathbf{a}_x^a}$$

$$\sum \bar{P} = \sum P_x = \sum \frac{B_x - V_x}{\mathbf{a}_x^a}$$

1.3.3 Prämien - Kollektive Verfahren

Technische Durchschnittsprämie: $\tilde{P} = \dfrac{B - V}{\sum \mathbf{a}_x^a}$

Durchschnittsprämie: $\bar{P} = \frac{1}{n} \sum P_x$

$\tilde{P} < \bar{P}$

$\tilde{P} > P_x$

$\tilde{P} < P_x$

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung

Zusammengesetzte Ordnung mit h Ausscheideursachen

Einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeiten:

$\boldsymbol{q_x^{(i)},\ i = 1, \ldots, h}$

Einjährige Bestandsverbleibewahrscheinlichkeit:

$$\boldsymbol{p_x = 1 - q_x = 1 - \sum_{i=1}^{h} q_x^{(i)}}$$

Abhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung - Prospektive Reserve

Forderung an die prospektive Reserve ${}_{m}V_{x}^{pro}$:

Nach m Jahren (vor Einzahlung der Prämie des $(m+1)$-ten Jahres!) soll in jedem Jahr die Differenz zwischen Barwert der zukünftigen Leistungen und Barwert der zukünftigen Prämien durch die Reserve gedeckt sein.

$$ {}_{m}V_{x}^{pro} \; := \; {}_{m}B_{x} - {}_{m}B_{x}^{P}, \quad m = 0, 1, \ldots $$

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung - Prospektive Reserve

Leistungsbarwert zum Alter $x + m$

$$ {}_m B_x \;=\; \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_k p_{x+m} \, {}_{m+k}\hat{L}_x, \quad m = 0, 1, \ldots $$

Prämienbarwert zum Alter $x + m$:

$$ {}_m B_x^P \;=\; \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_k p_{x+m} \, {}_{k+m}\hat{P}_x, \quad m = 0, 1, \ldots $$

Prospektive Reserve zum Alter $x + m$:

$$ {}_m V_x^{pro} \;=\; \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_k p_{x+m} \, \left({}_{m+k}\hat{L}_x \;-\; {}_{m+k}\hat{P}_x \right), \quad m = 0, 1, \ldots $$

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung - Prospektive Reserve

Interpretation für $m = 0$:

$$\boldsymbol{{}_0V_x^{pro} \; = \; {}_0B_x \; - \; {}_0B_x^P}$$

$_0V_x^{pro}$ stellt den Betrag dar, der zum Beginn des Vertrags vorhanden sein muß, um die zukünftigen Leistungen unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien rechnungsmäßig leisten zu können.

Individuelles Äquivalenzprinzip: $_0B_x \; = \; {}_0B_x^P$

$$\boldsymbol{{}_0V_x^{pro} \; = \; {}_0B_x \; - \; {}_0B_x^P \; = \; 0}$$

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung - Prospektive Reserve

Speziallfall Einmalprämie

$$\begin{aligned} {}_0\hat{P}_x &> 0 \text{ für } m = 0 \\ &= 0 \text{ für } m > 0 \end{aligned}$$

$${}_mV_x^{pro} = \sum_{k \geq 0} v^k \; {}_kp_{x+m} \; {}_{m+k}\hat{L}_x = {}_mB_x \quad \text{für } m > 0$$

$${}_0V_x^{pro} = {}_0B_x - {}_0\hat{P}_x \quad \text{bzw.} \quad {}_0V_x^{pro} + {}_0\hat{P}_x = {}_0B_x$$

Ind. Äquivalenzprinzip: ${}_0V_x^{pro} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_0\hat{P}_x = {}_0B_x$

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung - retrospektive Reserve

${}_{m}V_{x}^{retro}$: **Rechnungsmäßiges Saldo von Einnahmen und Ausgaben nach m Jahren bei Anfangskapital K.**

Der Barwert dieses Saldos stellt sich zum Beginn auf

$$B \;=\; K \;+\; \sum_{k=0}^{m-1} v^{k}\;{}_{k}p_{x}\;({}_{k}\hat{P}_{x} \;-\; {}_{k}\hat{L}_{x}),$$

der Barwert der retrospektiven Reserve zum Beginn auf

$$B \;=\; v^{m}\;{}_{m}p_{x}\;{}_{m}V_{x}^{retro}.$$

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung - retrospektive Reserve

Gleichsetzung führt zu:

$$v^m \; {}_m p_x \; {}_m V_x^{retro} \;=\; K \;+\; \sum_{k=0}^{m-1} v^k \; {}_k p_x \; ({}_k \hat{P}_x \;-\; {}_k \hat{L}_x)$$

$${}_m V_x^{retro} \;=\; \frac{r^m}{{}_m p_x} \left[K \;+\; \sum_{k=0}^{m-1} v^k \; {}_k p_x \; ({}_k \hat{P}_x \;-\; {}_k \hat{L}_x) \right], \;\; m = 0, 1, \ldots, \;\; {}_m p_x \neq 0$$

Für $m = 0$ folgt:

${}_0 V_x^{retro} = K$ **: eingesetztes (tatsächliches) Anfangskapital**

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung

Prospektive Reserve =

ist der Betrag, der zum jeweiligen Stichtag (also auch zum Stichtag 0!) vorhanden sein müßte, wenn der Versicherungsvertrag - im Mittel - erfüllbar sein soll, der Betrag also, der bei „rechnungsmäßigem Ablauf" des Vertrags genau ausreicht, um unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien die zukünftigen Leistungen zu erbringen (rechnungsmäßiges Soll).

Retrospektive Reserve =

der Betrag, der unter Berücksichtigung des eingesetzten Anfangskapitals rechnungsmäßig zum betrachteten Stichtag bei gegebenen Leistungs- und Prämienfestsetzungen vorhanden ist, also der Betrag, der rechnungsmäßig nach Abrechnung aller Einnahmen und Ausgaben noch vorhanden ist (rechnungsmäßiges Ist).

1.3.4 Reserven - Allgemeine Darstellung -

Zusammenhang zwischen ${}_mV_x^{pro}$ und ${}_mV_x^{retro}$:

$$
\begin{aligned}
v^m\,{}_mp_x\,{}_mV_x^{retro} &= {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k\,{}_kp_x\,({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) \\
&= {}_0V_x^{retro} + \underbrace{\sum_{k\geq 0} v^k\,{}_kp_x({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x)}_{-{}_0V_x^{pro}} - \sum_{k\geq m} v^k\,{}_kp_x({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) \\
&= {}_0V_x^{retro} - {}_0V_x^{pro} + v^m\,{}_mp_x \underbrace{\sum_{k\geq 0} v^k\,{}_kp_{x+m}({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x)}_{{}_mV_x^{pro}}
\end{aligned}
$$

$$
{}_mV_x^{pro} - {}_mV_x^{retro} = \frac{r^m}{{}_mp_x}({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro})
$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien

Alle Prämien jährlich vorschüssig !

Gesamtprämie: ${}_m\hat{P}_x$

Sparprämie: ${}_mP_x^S$

Risikoprämie: ${}_mP_x^R$

$${}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

$${}_{m+1}V_x = r\,({}_mV_x + {}_mP_x^S)$$

$${}_mP_x^S := v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien

$$_{m}P_x^R = {}_{m}\hat{P}_x - {}_{m}P_x^S$$

$$_{m}\hat{P}_x = {}_{m}\hat{L}_x + v\, p_{x+m}\, {}_{m+1}V_x - {}_{m}V_x$$

$$_{m}P_x^R = {}_{m}\hat{L}_x + v\, p_{x+m}\, {}_{m+1}V_x - {}_{m}V_x - \underbrace{v\, {}_{m+1}V_x + {}_{m}V_x}_{{}_{m}P_x^S}$$

$$= {}_{m}\hat{L}_x - v\, q_{x+m}\, {}_{m+1}V_x$$

Risikoprämie für alle Ursachen: $_{m}P_x^R$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien

Aufteilung der Risikoprämien nach den einzelnen Ursachen:

$$ {}_mP_x^R = \sum_{i=0}^{h} {}_mP_x^{R(i)} = {}_m\hat{L}_x \; - \; v\, q_{x+m}\; {}_{m+1}V_x $$

$$ {}_k\hat{L}_x \;\; := \;\; {}_kL_x^{(0)} \; + \; \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)}\; q_{x+k}^{(i)}, \qquad k = 0, 1, \ldots $$

${}_k\hat{L}_x$: Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+k, x+k+1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

$$ {}_mP_x^R = {}_mL_x^{(0)} \; + \; \sum_{i=1}^{h} ({}_mL_x^{(i)} - v\; {}_{m+1}V_x)\; q_{x+m}^{(i)} $$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien

Risikoprämie der i-ten Ausscheideursache:

$$ {}_m\boldsymbol{P}_x^{R(i)} = \boldsymbol{q}_{x+m}^{(i)}\,({}_m\boldsymbol{L}_x^{(i)} - \boldsymbol{v}\,{}_{m+1}\boldsymbol{V}_x) = \boldsymbol{q}_{x+m}^{(i)}[{}_m\boldsymbol{L}_x^{(i)} - ({}_m\boldsymbol{V}_x + {}_m\boldsymbol{P}_x^{S})] $$

$$ {}_m\boldsymbol{P}_x^{R(0)} = {}_m\boldsymbol{L}_x^{(0)} $$

Risikoprämie für das Verbleiben im Bestand: die Risikoprämie besteht in der Jahresleistung. Der Rückgriff auf die vorhandene Reserve verbietet sich, da die berechtigte Person weiter in der Hauptgesamtheit bleibt.

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Aktivenausscheideordnung

$$ {}_{m}P_x^R = i_{x+m}\,{}_{m}L_x^i + q_{x+m}^{aa}\,{}_{m}L_x^{aa} - v\,(i_{x+m} + q_{x+m}^{aa})\,{}_{m+1}V_x, \quad m < n $$

Risikoprämie für die Invalidität:

$$ {}_{m}P_x^{Ri} = i_{x+m}\,({}_{m}L_x^i - v\,{}_{m+1}V_x) $$

Risikoprämie eines Aktiven für den Aktiventod:

$$ {}_{m}P_x^{Raa} = q_{x+m}^{aa}({}_{m}L_x^{aa} - v\,{}_{m+1}V_x) $$

Eine Cantellizusage führt bezüglich der Ursachen, bezüglich derer die Reserven zum Ende des Jahres gewährt werden, zur Risikoprämie 0

1.3.5 Spar- und Risikoprämien

$${}_mP_x^S = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x$$

$$r({}_mV_x + {}_mP_x^S) = {}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \ldots$$

$${}_mV_x = r^m\,{}_0V_x + \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k}\,{}_kP_x^S$$

Die Reserve nach m Jahren setzt sich zusammen aus dem aufgezinsten Anfangskapital plus den aufgezinsten Sparprämien.

Zuführung eines im Bestand Verbleibenden:

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V_x - {}_mV_x &= {}_mV_x + {}_mP_x^S + i\,({}_mV_x + {}_mP_x^S) - {}_mV_x \\ &= {}_mP_x^S + i({}_mV_x + {}_mP_x^S) = {}_mP_x^S + d\,{}_{m+1}V_x \end{aligned}$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - natürliche Prämie

${}_m\hat{P}_x := {}_m\hat{L}_x$:

Für jedes Jahr entspricht die „natürliche Prämie" dem Barwert der in diesem Jahr verursachten Leistungen des Jahres.

$${}_0V_x = 0$$

$${}_mV_x + {}_m\hat{P}_x \;=\; {}_m\hat{L}_x + v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \ldots$$

$$\Longrightarrow \quad {}_mV_x \;=\; 0 \;\forall\, m$$

$${}_mP_x^R \;=\; {}_m\hat{L}_x - v\,q_{x+m}\,{}_{m+1}V_x \;=\; {}_m\hat{L}_x \;=\; {}_m\hat{P}_x$$

$${}_mP_x^S = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x \;=\; 0 \quad \forall\, m$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Verrentung der Reserve

Verrentung der Reserve: $_m\boldsymbol{L}_x^{(i)} = \boldsymbol{v}\ _{m+1}\boldsymbol{V}_x \ \ \forall\, \boldsymbol{i}$

$$
\begin{aligned}
{}_m\hat{\boldsymbol{L}}_x &= {}_m\boldsymbol{L}_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} \boldsymbol{q}_{x+m}^{(i)}\, {}_m\boldsymbol{L}_x^{(i)} \\
&= {}_m\boldsymbol{L}_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} \boldsymbol{q}_{x+m}^{(i)}\, \boldsymbol{v}\ {}_{m+1}\boldsymbol{V}_x \\
&= {}_m\boldsymbol{L}_x^{(0)} + \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{q}_{x+m}\ {}_{m+1}\boldsymbol{V}_x
\end{aligned}
$$

$$
{}_m\boldsymbol{P}_x^{R} = {}_m\hat{\boldsymbol{L}}_x - \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{q}_{x+m}\ {}_{m+1}\boldsymbol{V}_x = {}_m\boldsymbol{L}_x^{(0)}
$$

$$
{}_m\boldsymbol{L}_x^{(0)} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad {}_m\boldsymbol{P}_x^{R} = \boldsymbol{0}\,, \quad {}_m\hat{\boldsymbol{P}}_x = {}_m\boldsymbol{P}_x^{S}
$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Sparprämie > Prämie

$_m\hat{L}_x = 0,$ **z.B. während der Wartezeit**

$$_mP_x^R = -v\, q_{x+m}\, {}_{m+1}V_x$$

$$_mP_x^S = {}_m\hat{P}_x - {}_mP_x^R = {}_m\hat{P}_x + v\, q_{x+m}\, {}_{m+1}V_x > {}_m\hat{P}_x \qquad \text{für } {}_{m+1}V_x > 0$$

Die Reserve für wegfallende Verpflichtungen wird von der Versichertengemeinschaft geerbt.

$$\Longrightarrow \quad {}_mP_x^S > {}_m\hat{P}_x$$

$$_mP_x^R < 0$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Gesamtprämie $= 0$ Spar und Risikoprämie $\neq 0$

Jährlich vorschüssig zahlbare Rente vom Jahresbetrag $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}
{}_m\hat{L}_x &= R \\
{}_mV_x &= R\,a_{x+m} \\
a_{x+m} &= 1 + v\,p_{x+m}\,a_{x+m+1}
\end{aligned}$$

Sparprämie:

$$\begin{aligned}
{}_mP_x^S &= v\;{}_{m+1}V_x - {}_mV_x = R\,[v\,a_{x+m+1} - a_{x+m}] \\
&= R\,[\underbrace{v\,p_{x+m}\,a_{x+m+1} + v\,q_{x+m}a_{x+m+1}}_{v\,a_{x+m+1}} - 1 - v\,p_{x+m}\,a_{x+m+1}] \\
&= -R\,[1 - v\,q_{x+m}\,a_{x+m+1}]
\end{aligned}$$

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Gesamtprämie $= 0$ Spar und Risikoprämie $\neq 0$

Risikoprämie:

$$
\begin{aligned}
{}_m\boldsymbol{P}_x^R &= {}_m\hat{\boldsymbol{L}}_x - \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{q}_{x+m}\,{}_{m+1}\boldsymbol{V}_x \\
&= \boldsymbol{R}\,[1 - \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{q}_{x+m}\,\boldsymbol{a}_{x+m+1}] \\
&= -\,{}_m\boldsymbol{P}_x^S \\
{}_m\hat{\boldsymbol{P}}_x &= {}_m\boldsymbol{P}_x^S +_m \boldsymbol{P}_x^R = \boldsymbol{0} \\
{}_m\boldsymbol{P}_x^R &= {}_m\boldsymbol{V}_x - \boldsymbol{v}\,{}_{m+1}\boldsymbol{V}_x
\end{aligned}
$$

Die Risikoprämie wird durch Auflösung der Reserve gestellt.

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Gesamtprämie $= 0$ Spar und Risikoprämie $\neq 0$

$${}_m\hat{L}_x = {}_mL_x^{(0)} = R$$

${}_mL_x^{(1)} = 0$, **bei Tod ist keine Leistung fällig**

Risikoprämie für den Überlebensfall:

$${}_mP_x^{R(0)} = R$$

Risikoprämie für die Ausscheideursache „*Tod*“ :

$${}_mP_x^{R(1)} = -v\,R\,q_{x+m}\,a_{x+m+1}, \quad {}_mP_x^{R(1)} < 0$$

Der einzelne Berechtigte erhält eine ,,Leistung”, nämlich er ,,erbt” seinen Anteil an wegfallenden Verpflichtungen

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Gesamtprämie $= 0$ Spar und Risikoprämie $\neq 0$

$$_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{R}} = -{}_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{S}} = {}_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{R}(0)} + {}_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{R}(1)}$$

$$_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{R}(1)} = -{}_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{S}} - {}_m\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{R}(0)} = {}_m\boldsymbol{V}_x - \boldsymbol{v}\,{}_{m+1}\boldsymbol{V}_x - \boldsymbol{R}$$

Die Summe der Risikoprämien für den Todesfall eines Rentnerbestandes kann global aus den Reserven zum Beginn und zum Ende des Jahres und aus den Rentenleistungen des Jahres berechnet werden.

1.3.5 Spar- und Risikoprämien - Gesamtprämie $= 0$
Spar und Risikoprämie $\neq 0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= -\,{}_m\boldsymbol{P}_x^{S} - {}_m\boldsymbol{P}_x^{R(1)} \\
&= {}_m\boldsymbol{V}_x - \boldsymbol{v}\,{}_{m+1}\boldsymbol{V}_x + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{q}_{x+m}\,\mathbf{a}_{x+m+1}
\end{aligned}
$$

Die Jahresrente $\boldsymbol{R}$ setzt sich zusammen aus:

${}_m\boldsymbol{V}_x - \boldsymbol{v}\,{}_{m+1}\boldsymbol{V}_x$: Auflösung der Reserve (hier: Barwert)

$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{q}_{x+m}\,\mathbf{a}_{x+m+1}$: Vererbungsbetrag der wegfallenden Verpflichtungen

1.4.1 Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen

Für die retrospektive Reserve gilt:

$$\begin{aligned} v^{m+1}\,{}_{m+1}p_x\,{}_{m+1}V_x^{retro} &= {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m} v^k\,{}_kp_x\,({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) \\ &= \underbrace{{}_0V_x + \sum_{k=0}^{m-1} v^k\,{}_kp_x\,({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x)}_{v^m\,{}_mp_x\,{}_mV_x^{retro}} + v^m\,{}_mp_x\,({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x) \end{aligned}$$

$$v^m\,{}_mp_x\,v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x^{retro} = v^m\,{}_mp_x\,{}_mV_x^{retro} + v^m\,{}_mp_x\,({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x)$$

Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen:

$${}_mV_x^{retro} + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x^{retro}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

1.4.1 Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen

Diese Gleichungen gelten auch für die prospektive Reserve:

$$
\begin{aligned}
{}_m V_x^{pro} &= \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_k p_{x+m} \left({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x \right) \\
&= {}_m\hat{L}_x - {}_m\hat{P}_x + \sum_{k\geq 1} v^k \, {}_k p_{x+m} \left({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x \right) \\
&= {}_m\hat{L}_x - {}_m\hat{P}_x + v \, p_{x+m} \sum_{k\geq 1} v^{k-1} \, {}_{k-1} p_{x+m+1} \left({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x \right) \\
&= {}_m\hat{L}_x - {}_m\hat{P}_x + v \, p_{x+m} \sum_{k\geq 0} v^{k} \, {}_{k} p_{x+m+1} \left({}_{m+1+k}\hat{L}_x - {}_{m+1+k}\hat{P}_x \right) \\
&= {}_m\hat{L}_x - {}_m\hat{P}_x + v \, p_{x+m} \, {}_{m+1}V_x^{pro}
\end{aligned}
$$

1.4.1 Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen

$\Longrightarrow$

$$_{m}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{pro}} + {}_{m}\hat{\boldsymbol{P}}_{x} = {}_{m}\hat{\boldsymbol{L}}_{x} + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{p}_{x+m}\ {}_{m+1}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{pro}}$$

Generell gilt also:

$$_{m}\boldsymbol{V}_{x} + {}_{m}\hat{\boldsymbol{P}}_{x} = {}_{m}\hat{\boldsymbol{L}}_{x} + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{p}_{x+m}\ {}_{m+1}\boldsymbol{V}_{x}, \quad \boldsymbol{m = 0, 1, \ldots}$$

1.4.1 Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen

Technische Bezeichnung: Thiel'sche Differenzengleichung, da Thiel diese Gleichung im Rahmen der kontinuierlichen Darstellung hergeleitet hat (Thiel'sche Differentialgleichung).

Anwendungsbeispiel: Es besteht folgende Zusage:

Bei Invalidität wird die Reserve zum Ende des Wirtschaftsjahres $_{m+1}V_x$ am Ende des Wirtschaftsjahres geleistet;

Bei Tod als Aktiver wird die Reserve zum Ende des Wirtschaftsjahres $_{m+1}V_x$ am Ende des Wirtschaftsjahres geleistet;

1.4.1 Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen

Bei Erreichen der Altersgrenze wird der Barwert B_z einer zugesagten lebenslänglich laufenden Rente gestellt.

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
{}_m\hat{L}_x &= v\, i_{x+m}\; {}_{m+1}V_x + v\, q^{aa}_{x+m}\; {}_{m+1}V_x \quad \text{für } k < n \\
&= B_z \quad \text{für } k = n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v\, p_{x+m}\; {}_{m+1}V_x \\
&= v\, i_{x+m}\; {}_{m+1}V_x + v\, q^{aa}_{x+m}\; {}_{m+1}V_x \\
&\quad + v\,(1 - i_{x+m} - q^{aa}_{x+m})\; {}_{m+1}V_x \\
&= v\; {}_{m+1}V_x \text{ für } m < n
\end{aligned}
$$

1.4.1 Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen

Sparvertrag !

Beispiel für den Satz von Cantelli !

In praxi Bedeutung für den Fall, dass bei Ausscheiden Leistungen in Höhe der Reserve erbracht oder gestellt werden (kein Bilanzsprungrisiko !).

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Ausgangspunkt: Die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen:

$${}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m}\ {}_{m+1}V_x,\ m = 0, 1, \ldots$$

Wir setzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein Höchstalter z an, sowie $n := z - x$.

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Für das Folgende erweist es sich als günstig, die Prämien aufzuspalten in ein Prämiengewicht $P_x > 0$ und in ein Prämienprofil (Prämienbewertungsfaktoren) ${}_mf_x$ gemäß

$${}_m\hat{P}_x = {}_mf_x\, P_x, m = 0, 1, \ldots, n$$

Hier lassen wir uns von der Vorstellung leiten, dass das Prämienprofil vorgegeben ist, so dass dadurch das Prämiengewicht P_x durch das Äquivalenzprinzip definiert werden kann. Für die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen erhalten wir zunächst:

$${}_mV_x + {}_mf_x\, P_x = {}_m\hat{L}_x + vp_{x+m}\ {}_{m+1}V_x, m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

für $m = n$ setzen wir noch die triviale Gleichung

$${}_nV_x + {}_nf_x\, P_x = {}_n\hat{L}_x$$

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Betrachten wir das Prämiengewicht $\boldsymbol{P_x}$ sowie die Reserven $\boldsymbol{{}_1V_x, {}_2V_x, \ldots, {}_nV_x}$ als Unbekannte, dann stellen die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen ein lineares Gleichungssystem für diese Unbekannten dar: das versicherungsmathematische Bilanzgleichungssystem. Wir wollen dieses Gleichungssystem in Matrizenform darstellen. Hierzu vereinbaren wir:

$$\mathrm{V}:=\begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ {}_2V_x \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix}$$ ***Reservevektor*** **(Vektor der Unbekannten des GlS.)**

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} {}_0L_x \\ {}_1L_x \\ {}_2L_x \\ \vdots \\ {}_nL_x \end{pmatrix} \; \textit{Leistungsvektor}$$

mit

$${}_0L_x = {}_0\hat{L}_x - {}_0V_x, \; {}_kL_x = {}_k\hat{L}_x \text{ für } k \geq 1.$$

Da i.a. ${}_0V_x = 0$ gesetzt wird, stimmen die ${}_kL_x$ und ${}_k\hat{L}_x$ in der Regel überein. Der größeren Allgemeinheit wegen ist es jedoch ratsam, ${}_0V_x \neq 0$ zuzulassen (z. B. zur einfachen Berücksichtigung der Zillmerung).

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Weiter setzen wir:

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} {}_0f_x \\ {}_1f_x \\ {}_2f_x \\ \vdots \\ {}_nf_x \end{pmatrix} \textit{ Prämienprofil,}$$

Koeffizientenmatrix **des Gleichungssystems:**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} {}_0f_x & -vp_x & & & & \\ {}_1f_x & 1 & -vp_{x+1} & \mathbf{0} & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \mathbf{0} & & 1 & -vp_{z-1} \\ {}_nf_x & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Damit erhalten wir aus den versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen das Gleichungssystem in Matrizendarstellung gemäß

PV=L

Vor.: $_k\boldsymbol{f}_x \geq 0 \; \forall \, \boldsymbol{k}$ **und** $\exists \, \boldsymbol{k} : {}_k\boldsymbol{f}_x > 0$**: mindestens eine Prämie** > 0

$\Rightarrow$

$\det \boldsymbol{P} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{v}^k \; {}_k\boldsymbol{p}_x \; {}_k\boldsymbol{f}_x > 0$

($\det \boldsymbol{P} =$ **Barwert der Prämie für** $\boldsymbol{P}_x = 1$**), so dass die Gleichung**

PV=L

die eindeutige Lösung

$\mathbf{V}=\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{L}$

besitzt.

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Spezialfall der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -vp_x & & & & \\ & 1 & -vp_{x+1} & \mathbf{0} & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & \mathbf{0} & & 1 & -vp_{z-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =: P_0$$

Dieser Fall entspricht dem Prämienprofil ${}_0f_x = 1, {}_kf_x = 0$ für $k > 0$, also dem Fall der Einmalprämie. Es sei angemerkt, dass hier offenbar gilt: $\det P_0 = 1$.

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Für diesen Fall lautet das versicherungsmathematische Bilanzgleichungssystem damit:

$$\mathbf{P}_0 \boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$$

Falls $_0\boldsymbol{V}_x = 0$ **gilt:**

$$\mathbf{V}{=}\mathbf{B}{=}\begin{pmatrix} {}_0\boldsymbol{B}_x \\ {}_1\boldsymbol{B}_x \\ {}_2\boldsymbol{B}_x \\ \vdots \\ {}_n\boldsymbol{B}_x \end{pmatrix} \textbf{\textit{Barwertvektor}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_0 \, \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{L}, \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{P}_0^{-1} \boldsymbol{L} \end{aligned}$$

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Diese Beziehung ist äquivalent mit den für die Praxis eminent wichtigen Rekursionsformeln für den Barwert

$$
\begin{aligned}
{}_m\boldsymbol{B}_x &= {}_m\hat{\boldsymbol{L}}_x + \boldsymbol{v}\boldsymbol{p}_{x+m}\,{}_{m+1}\boldsymbol{B}_x, \boldsymbol{m} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n} - \mathbf{1} \\
{}_n\boldsymbol{B}_x &= {}_n\hat{\boldsymbol{L}}_x
\end{aligned}
$$

bzw. äquivalent mit der allg. Darstellung für den Barwert

$$
{}_m\boldsymbol{B}_x = \sum_{k=0}^{n-m} \boldsymbol{v}^k\,{}_k\boldsymbol{p}_{x+m}\,{}_{k+m}\hat{\boldsymbol{L}}_x, \boldsymbol{m} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}.
$$

Damit ist die Gleichung $P_0\,B = L$ explizit gelöst.

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Mit $\boldsymbol{A := P_0^{-1}P}$ folgt $\boldsymbol{P = P_0 A}$,

und damit aus $\boldsymbol{PV = L}$

$\boldsymbol{P_0 A V = L.}$

Hieraus folgt wg. $\boldsymbol{P_0 B = L}$:

$\boldsymbol{AV = P_0^{-1} P_0 A V = P_0^{-1} L = B}$**, oder**

$\boldsymbol{V = A^{-1} B.}$

Die beiden letzten Gleichungen stellen den Zusammenhang zwischen Barwert und Reserve einer Verpflichtung dar.

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Definiert man einen Vektor $\boldsymbol{a}$ durch die Gleichung

$\boldsymbol{P}_0\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$

mit

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} {}_0\boldsymbol{a}_x \\ {}_1\boldsymbol{a}_x \\ {}_2\boldsymbol{a}_x \\ \vdots \\ {}_n\boldsymbol{a}_x \end{pmatrix},$$

dann gilt offenbar:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|ccccc} & & & \mathbf{0} & & \\ \hline & \mathbf{1} & & & & \\ & & \cdot & & \mathbf{0} & \\ \boldsymbol{a} & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & \mathbf{0} & & & \cdot \\ & & & & & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

Denn:

$$\boldsymbol{P_0 A = P}.$$

Da nun $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{a}$ mittels der gleichen Koeffizientenmatrix berechnet werden (nur die rechten Seiten der Gleichungssysteme sind verschieden), gelten für ${}_m\boldsymbol{a}_x$ die gleichen Formeln wie für ${}_m\boldsymbol{B}_x$, also:

$${}_m\boldsymbol{a}_x = {}_m\boldsymbol{f}_x + \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{p}_{x+m}\ {}_{m+1}\boldsymbol{a}_x,\ \ m = 0, 1, ..., n-1$$

$${}_n\boldsymbol{a}_x = {}_n\boldsymbol{f}_x$$

bzw.

$${}_m\boldsymbol{a}_x = \sum_{k=0}^{n-m} \boldsymbol{v}^k\ {}_k\boldsymbol{p}_{x+m}\ {}_{m+k}\boldsymbol{f}_x,\ \ m = 0, 1, ..., n$$

1.4.2 Lineares Gleichungssystem für Prämien und Reserven

$\boldsymbol{AV = B}$ **schreibt sich komponentenweise in der bekannten Form**

$${}_m\boldsymbol{V}_x + \boldsymbol{P}_x \, {}_m\boldsymbol{a}_x = {}_m\boldsymbol{B}_x, \;\; \boldsymbol{m = 0, 1, ..., n,}$$

und damit $\boldsymbol{V = A^{-1}B}$ **gemäß**

$${}_m\boldsymbol{V}_x = {}_m\boldsymbol{B}_x - \frac{{}_0\boldsymbol{B}_x}{{}_0\boldsymbol{a}_x} \, {}_m\boldsymbol{a}_x, \;\; \boldsymbol{m = 0, 1, ..., n,}$$

bei ${}_0\boldsymbol{V}_x \neq \boldsymbol{0}$**:** ${}_m\boldsymbol{V}_x = {}_m\boldsymbol{B}_x - \dfrac{{}_0\boldsymbol{B}_x - {}_0\boldsymbol{V}_x}{{}_0\boldsymbol{a}_x} \, {}_m\boldsymbol{a}_x$

Bem.: det $\boldsymbol{P} =$ **det** $\boldsymbol{A} = {}_0\boldsymbol{a}_x > \boldsymbol{0}$**.**

1.5 Implizit definierte Leistungen

In praxi kommen auch implizit definierte Leistungen vor, z. B. Rückzahlung von Prämien oder Verrentung der Reserve im Leistungsfall. In diesem Fall sind die Leistungen implizit definiert, d. h., die Leistungen hängen von der Prämie und/oder von der Reserve ab:

$$\boldsymbol{L = \hat{F}(L', V)}$$

wobei $\boldsymbol{L'}$ explizit, also unabhängig von Prämie und Reserve definiert ist. Häufig besteht eine Beziehung gemäß

$$\boldsymbol{L = L' + F(V).}$$

1.5 Implizit definierte Leistungen

Aus $\boldsymbol{PV = L}$ folgt:

$$\boldsymbol{PV = \hat{F}(L', V)}$$

bzw.

$$\boldsymbol{PV = L' + F(V).}$$

In beiden Fällen handelt es sich um algebraische Vektorgleichungen, die i.a. analytisch nicht lösbar sind.

1.5 Implizit definierte Leistungen

Ist $\boldsymbol{F}$ jedoch linear, dann gilt:

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{FV}$$

mit einer geeigneten Matrix $\boldsymbol{F}$.

Diese Gleichung besitzt für $\det(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{F}) \neq 0$ die eindeutige und analytisch darstellbare Lösung

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{L}'.$$

Diese Lösung stellt eine Erweiterung des Theorems von Cantelli dar. Das Theorem von Cantelli erweist sich als Spezialfall dieser Lösung.

1.5 Klassischer Cantellifall

Zusage: Als Leistung im Fall der Invalidität wird die Reserve am Ende des Jahres zum Ende des Jahres verrentet.

$$ {}_{m}L_x^i = v\ i_{x+m}\ {}_{m+1}V_x,\ m = 0, 1, \ldots, n-1 $$

In diesem Fall ist

$$
F = \begin{pmatrix}
0 & vi_x & & & & & \\
 & \cdot & vi_{x+1} & & 0 & & \\
 & & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \\
 & 0 & & & & \cdot & vi_{z-1} \\
 & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

womit für $P' := P - F$ folgt:

$$P' = P - F = \begin{pmatrix} {}_0f_x & -vp'_x & & & & \\ {}_1f_x & 1 & -vp'_{x+1} & 0 & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & 0 & & 1 & -vp'_{z-1} \\ {}_nf_x & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$p'_u = 1 - q_u^{aa},\ u = x, \ldots, z-1,$$

also eine Matrix mit dem gleichen Aufbau wie die Koeffizientenmatrix P mit dem Unterschied, dass die Ausscheidewahrscheinlichkeiten für Invalidität weggefallen sind.

1.5 Klassischer Cantellifall

Nachdrücklich ist darauf hinzuweisen, was meistens nicht beachtet wird, dass durch das Theorem von Cantelli lediglich Prämie und Reserve bestimmt sind: z.B. gilt das Theorem nicht für den Barwert, d.h., der Barwert ${}_mB_x$ läßt sich in unserem Beispiel nicht dadurch berechnen, dass man einfach die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten i_x wegläßt; vielmehr ist er zu berechnen gemäß

$$ {}_mB_x = {}_mV_x + P_x\ \mathbf{a}^a_{x+m} $$

wobei sich ${}_mV_x$ und P_x nach dem Theorem von Cantelli ergeben, und die a^a_x unter Berücksichtigung beider Ausscheidewahrscheinlichkeiten i_x und q^{aa}_x, also ganz „normal“ zu berechnen sind.

1.5 Weitere Beispiele für implizit definierte Leistungen

Normalerweise wird bei Cantellizusagen bei Eintritt der Invalidität die Reserve am Beginn des Wirtschaftsjahres zum Zeitpunkt des Versorgungsfalles oder die Reserve am Zeitpunkt des Versorgungsfalles zum zugesagten Zeitpunkt des Versorgungsfalles zugesagt, also (unter der Annahme der gleichmäßigen Verteilung des Eintritts des Versorgungsfalles innerhalb eines Jahres und Zulässigkeit der linearen Interpolation)

Fall (1): ${}_mL_x^i = v^{\frac{1}{2}}\, i_{x+m}\; {}_mV_x,\; m = 0, 1, \ldots, n-1$

oder

Fall (2): ${}_mL_x^i = v^{\frac{1}{2}}\; i_{x+m}\; {}_{m+\frac{1}{2}}V_x = v^{\frac{1}{2}}\; i_{x+m}\; \frac{1}{2}\; ({}_mV_x + {}_{m+1}V_x),\; m = 0, 1, \ldots, n-1$

1.5 Weitere Beispiele für implizit definierte Leistungen

Im Fall (1) lautet $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & & \\ & \boldsymbol{i}_{x+1} & & & & \mathbf{0} & \\ & & \boldsymbol{i}_{x+2} & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & \mathbf{0} & & & & \boldsymbol{i}_{z-1} & \\ & & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

und im Fall (2)

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i}_x & & & & & \\ & \boldsymbol{i}_{x+1} & \boldsymbol{i}_{x+1} & & & \mathbf{0} & \\ & & \boldsymbol{i}_{x+2} & \boldsymbol{i}_{x+2} & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & \mathbf{0} & & & & \boldsymbol{i}_{z-1} & \boldsymbol{i}_{z-1} \\ & & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich auch in diesen Fällen die Reserven angeben.

1.5 Weitere Beispiele für implizit definierte Leistungen

Weiteres Beispiel:

Da bei Cantellizusagen o.ä. in den Anfangsjahren der Betriebszugehörigkeit die Leistungen sehr gering ausfallen, wenn die Reserve (der Teilwert) verrentet wird, erscheint es sinnvoll, die Zusage mit einer Mindestrente auszustatten, also etwa: bei vorzeitiger Invalidität wird der Teilwert verrentet, jedoch mindestens eine jährliche Rente in Höhe von R gewährt, z.B.:

$$ {}_{m}L_x^i = v^{\frac{1}{2}}\, i_{x+m} \;\max\left({}_{x+\frac{1}{2}}V_x,\; R\, a^i_{x+m+\frac{1}{2}}\right) $$

Schon bei diesem einfachen Fall aus der Praxis haben wir es nicht mehr mit einem linearen Problem zu tun: Prämie und Reserve sind nicht analytisch darstellbar.

4.2 Der Teilwert

und andere Ansätze für die Rückstellungsermittlung

4.2.1 Das Modell

Der versicherungsmathematische Teilwert:

$$v_m = b_m - \frac{b_0}{\mathbf{a}_x^a} \ \mathbf{a}_{x+m}^a$$

Fiktive Prämie:

$$\frac{b_0}{\mathbf{a}_x^a}$$

4.2.1 Das Modell

Bezeichnungsweise:

$\boldsymbol{x}$: **versicherungsmathematisches Alter des Berechtigten bei Eintritt in das Unternehmen**

$\boldsymbol{m}$: **abgelaufene Dienstzeit**

$\boldsymbol{b_m}$: **Barwert der Verpflichtung zum Alter $\boldsymbol{x+m,\ m=0,1,...}$**

$\boldsymbol{a_u^a}$: **Aktivenrentenbarwert, $\boldsymbol{u=x,x+1,...}$**

4.2.1 Das Modell

Forderungen an eine Pensionsrückstellung nach handelsrechtlichen Gesichtspunkten:

1. **Gleichmäßige Verteilung des Aufwands auf die Zeit zwischen Diensteinstritt und Eintritt des Versorungsfalles**
2. **Einzelbewertung, und zwar derart, dass die dem Berechtigten später zufließenden Leistungen allein auf dem ihm angelasteten Aufwand, also seinen Prämien basieren.**

4.2.1 Das Modell

Modell bei einer lebenslänglichen Rentenververpflichtung mit jährlich vorschüssiger Zahlungsweise:

1. **Übersicht über alle möglichen zukünftigen Zahlungsströme**

   Zufallsgröße „Zahlungsstrom“

   Realisierungen „Zahlungsströme“

   $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

   $N : \Omega \to \mathbb{N}_0$: **Zufallsgröße „Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod des Rentners“**

   $\Rightarrow$

   $N + 1$ **Rentenzahlungen**

4.2.1 Das Modell

2. Erfüllungsbetrag der lebenslänglich lfd. Rente:

Finanzmathematischer Bartwert $\quad B = a_{\overline{N+1|}}$

mit

$$a_{\overline{N+1|}} = \sum_{k=0}^{N} v^k$$

Das Modell

3. Resultierende Rückstellung = Reserve = Barwert:

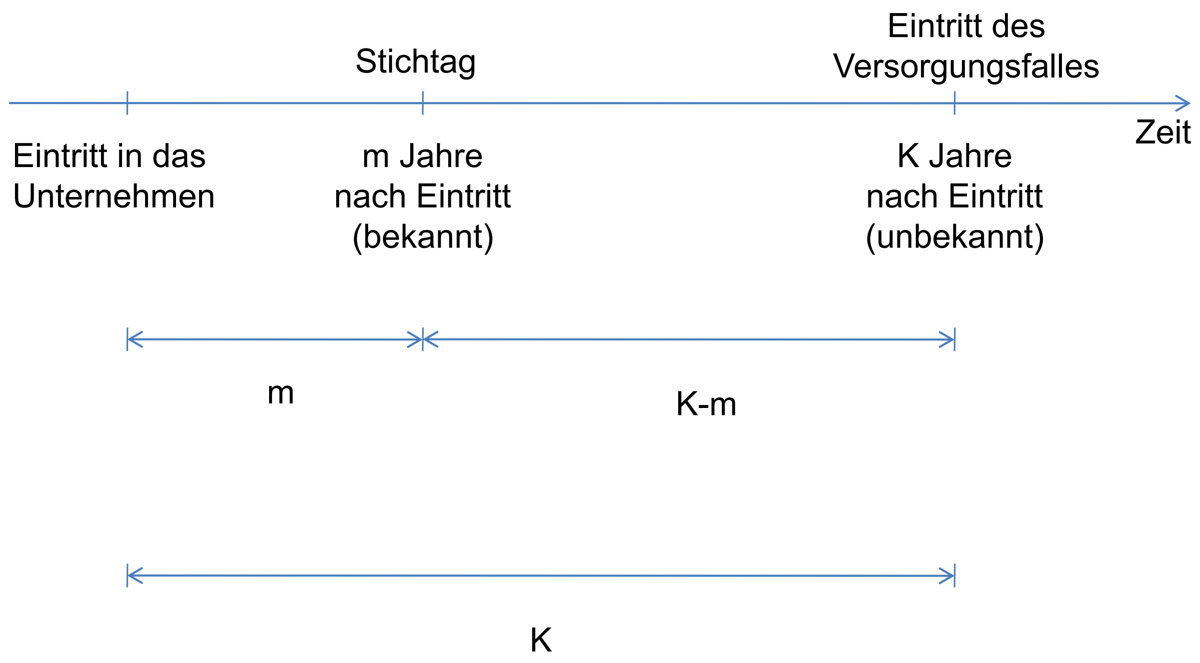
$$\boldsymbol{b = \mathcal{E}\,(B) = \textbf{Rückstellung} = \textbf{Barwert}\ a_x = \mathcal{E}\, a_{\overline{N+1}|}}$$

Es gilt das Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_{\overline{n(k)+1}|} = b \text{ f.s.}$$

mit $n(k)$: Realisierungen der vollendeten Lebenszeit N

4.2.2 Die retrospektive Reserve



4.2.2 Die retrospektive Reserve

Pensionsverpflichtung gegenüber einem Aktiven, also einem Anwärter. Er gehört zum Stichtag m Jahre zum Unternehmen.

1. Schritt:

Eintritt des Versogungsfalles im Jahr

$$]K-1, K],$$

nach Eintritt, also, vom Stichtag aus betrachtet: im Jahr

$$]K-m-1, K-m]$$

$K : \Omega \to \mathbb{N}$: **Zufallsgröße Ende des Jahres des Eintritts des Versorgungsfalles**

Zusage: Bei Ausscheiden im Jahr $]K-1, K]$ wg. Inv. oder Tod: Einmalleistung E_K am Ende des Jahres.

4.2.2 Die retrospektive Reserve

$s_{\overline{K|}} = \frac{r^K - 1}{d}$: Endwert der jährl. vorsch. K mal zahlbaren Zeitrente 1

Forderung an die jährlich vorsch. zahlbare Prämie Π_K :

$$\Pi_K \, (r^K + r^{K-1} + ... + r) = \Pi_K \, \frac{r^K - 1}{d} = \Pi_K \, s_{\overline{K|}} \stackrel{!}{=} E_K$$

$\Longrightarrow$

Prämie: $\Pi_K = \frac{E_K}{s_{\overline{K|}}}$

Bem.: Prämie a posteriori, Bedarfsprämie: Zufallsgröße

4.2.2 Die retrospektive Reserve

Das Äquivalenzprinzip wird punktweise, also pro Realisierung erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{Wg. } v^K\, s_{\overline{K}|} &= a_{\overline{K}|} \text{ folgt:} \\ \Pi_K\, a_{\overline{K}|} &= v^K\, E_K \\ B_K^P : &= \Pi_K\, a_{\overline{K}|} \end{aligned}$$

„Erfüllungsbetrag der zukünftigen Prämien bei Beginn"

$$B_K = v^K\, E_K$$

„Erfüllungsbetrag der zukünftigen Leistungen bei Beginn"

Äquivalenzprinzip: $B_K^P = B_K$

$$\Longrightarrow\ \Pi_K = \frac{B_K}{a_{\overline{K}|}}$$

4.2.2 Die retrospektive Reserve

2. Schritt:

$V_m^{(K)}$ **: Retrospektive Reserve als Erfüllungsbetrag, der nach m Jahren zur Erfüllung der Verplichtung zur Verfügung steht.**

Für $K > m$ - der Versorgungsfall ist noch nicht eingetreten - gilt:

$$V_m^{(K)} = \Pi_K \, s_{\overline{m}|}$$

3. Schritt:

$$t_1 := \mathcal{E}(V_m^{(K)} | K > m) = s_{\overline{m}|} \, \mathcal{E}(\Pi_K | K > m)$$

4.2.3 Die prospektive Reserve

NR.: Für $0 \le m < n$ gilt:

$$a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m}|} + v^m a_{\overline{n-m}|}$$

$$r^m a_{\overline{n}|} = v^{n-m} r^n a_{\overline{n}|} = v^{n-m} s_{\overline{n}|} = r^m a_{\overline{m}|} + a_{\overline{n-m}|} = s_{\overline{m}|} + a_{\overline{n-m}|}$$

$$\Longrightarrow$$

$$v^{n-m} s_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-m}|} = s_{\overline{m}|} \quad \square$$

${}_mB_K$ **: Erfüllungsbetrag der zukünftigen Leistungen nach m Jahren**

$$\Longrightarrow$$

$${}_mB_K = v^{K-m} E_K = v^{K-m} \Pi_K \; s_{\overline{K}|}$$

4.2.3 Die prospektive Reserve

${}_{m}B_K^P$ **: Erfüllungsbetrag der zukünftigen Prämien nach m Jahren**

$$ {}_{m}B_K^P = \Pi_K \, a_{\overline{K-m}|} = \frac{B_K}{a_{\overline{K}|}} \, a_{\overline{K-m}|} $$

$\hat{V}_m^{(K)}$ **: Prospektive Reserve nach m Jahren**

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_m^{(K)} &= {}_{m}B_K - {}_{m}B_K^P \\
&= \Pi_K \left(v^{K-m} \, s_{\overline{K}|} - a_{\overline{K-m}|}\right) \\
&= \Pi_K \, s_{\overline{m}|} \quad \text{(vgl. NR)} \\
&= V_m^{(K)}
\end{aligned}
$$

4.2.3 Die prospektive Reserve

$$V_m^{(K)} = {}_mB_K - {}_mB_K^P = {}_mB_K - \frac{B_K}{a_{\overline{K}|}}\, a_{\overline{K-m}|}$$

$$t_1 = \mathcal{E}\,(V_m^{(K)}\,|\,K > m) = \mathcal{E}\,\left[{}_mB_K - \frac{B_K}{a_{\overline{K}|}}\, a_{\overline{K-m}|}\,|\,K > m\right]$$

Bem : Für t_1 gilt das Gesetz der großen Zahlen

$$\Pi_K = \frac{B_K}{a_{\overline{K}|}}$$

$$t_2 = \mathcal{E}\,\left[{}_mB_K - \frac{\mathcal{E}\,(B_K|K > m)}{\mathcal{E}\,(a_{\overline{K}|}|K > m)}\, a_{\overline{K-m}|}\,|\,K > m\right]$$

$$t_3 = \mathcal{E}\,\left[{}_mB_K - \frac{\mathcal{E}\,(B_K)}{\mathcal{E}\,(a_{\overline{K}|})}\, a_{\overline{K-m}|}\,|\,K > m\right] \quad \textbf{: versmath. Teilwert}$$

4.2.3 Die prospektive Reserve

b_m : **Leistungsbarwert nach** m **Jahren**

$$b_m = \mathcal{E}\left({}_mB_K \,|\, K > m\right)$$
$$= \mathcal{E}\,\left(v^{K-m}\,E_K \,|\, K > m\right)$$

$v^{K-m}\,E_K$: **diskrete Zufallsgröße mit den Werten** $v^{1-m}E_1, v^{2-m}E_2, \ldots$ **und den Wahrscheinlichkeiten** $P\{K = k|K > m\}, k = 1, 2...$

$$\Longrightarrow\; b_m = \sum_{k>m} v^{k-m}\,E_k\,P\{K = k|K > m\}$$

$$P\{K = k|K > m\} = {}_{k-m-1}p^a_{x+m}\;q_{x+k-1},\; k = m+1, m+2...$$

$$q_u := i_u + q^{aa}_u, \quad u = x, x+1, ...,$$

$$_mp^a_x = \prod_{j=0}^{m-1}\; p^a_{x+j}$$

$$p^a_u = 1 - q_u = 1 - i_u - q^{aa}, \quad u = x, x+1, ...$$

4.2.3 Die prospektive Reserve

$$\begin{aligned}
b_m &= \mathcal{E}({}_mB_K \mid K > m) \\
&= \sum_{k>m} v^{k-m}\, E_k \;{}_{k-m-1}p_{x+m}\; q_{x+k-1} \\
&= \sum_{k\geq m} v^{k-m+1}\, E_{k+1} \;{}_{k-m}p^a_{x+m}\; q_{x+k} \\
&= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\;{}_kp^a_{x+m}\, q_{x+m+k}\, E_{m+k+1}
\end{aligned}$$

$$t_1 := \mathcal{E}(V_m^{(K)} | K > m) = s_{\overline{m}|}\; \mathcal{E}(\Pi_K | K > m)$$

$$\mathcal{E}\left(\Pi_K | K > m\right) = \mathcal{E}\left(\frac{B_K}{a_{\overline{K}|}} | K > m\right) = \mathcal{E}\left(\frac{v^K E_K}{a_{\overline{K}|}} | K > m\right)$$

$\dfrac{v^K E_K}{a_{\overline{K}|}}$: diskr. Zufallsgröße mit den Werten $\dfrac{vE_1}{a_{\overline{1}|}}, \dfrac{v^2\, E_2}{a_{\overline{2}|}}, \ldots$
und den Wahrscheinlichkeiten $P\{K = k | K > m\}, k = 1, 2, \ldots$

4.2.3 Die prospektive Reserve

$$\mathcal{E}\left(\Pi_K \middle| K > m\right) = \sum_{k>m} \frac{v^k E_k}{\mathbf{a}_{\overline{k}|}} P\{K = k | K > m\}$$

$$= \sum_{k>m} \frac{v^k E_k}{\mathbf{a}_{\overline{k}|}} \; {}_{k-m-1}p_{x+m} \; q_{x+k-1}$$

$$= \sum_{k \geq m} \frac{v^{k+1} E_{k+1}}{\mathbf{a}_{\overline{k+1}|}} \; {}_{k-m}p_{x+m} \; q_{x+k}$$

$$= v^m \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \; {}_{k}p_{x+m} \, q_{x+m+k} \; \frac{E_{m+k+1}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k+1}|}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$t_1 = s_{\overline{m}|} \mathcal{E}\left(\Pi_K \,\middle|\, K > m\right) = \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \; {}_{k}p_{x+m} \, q_{x+m+k} \; \frac{\mathbf{a}_{\overline{m}|} \, E_{m+k+1}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k+1}|}}$$

4.2.3 Die prospektive Reserve

Ähnlichkeit von $\dfrac{\mathbf{a}_{\overline{m}|}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k}|}} E_{m+k}$ **und** $\dfrac{m}{m+k} E_{m+k}$ **(erdienter Anspruch!)**

$$\frac{m}{m+k} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} 1}{\sum_{i=0}^{m+k-1} 1}$$

$$\frac{\mathbf{a}_{\overline{m}|}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k}|}} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} v^i}{\sum_{i=0}^{m+k-1} v^i}$$

Es gilt: $\dfrac{\mathbf{a}_{\overline{m}|}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k}|}} > \dfrac{m}{m+k} \; \forall \, m > 0, k > 0$

4.2.4 Näherungen

t_1: Schröder 1987; Ziel: Ausschaltung von Vererbungseffekten.

Die hier dargestellte von Schröder abweichende Ableitung wurde im Oktober 1996 veröffentlicht.

Anderer Ansatz: Schmauck 1986:

$$\frac{\mathbf{a}^{a}_{x\overline{m}|}}{\mathbf{a}^{a}_{x,\overline{m+k}|}} \quad \text{statt} \quad \frac{\mathbf{a}_{\overline{m}|}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k}|}}$$

$$\frac{\mathbf{a}^{a}_{x,\overline{m}|}}{\mathbf{a}^{a}_{x,\overline{m+k}|}} > \frac{\mathbf{a}_{\overline{m}|}}{\mathbf{a}_{\overline{m+k}|}} \;\forall\, m > 0, k > 0$$

4.2.4 Näherungen

$$t_3 = \mathcal{E}\left[{}_mB_K - \frac{\mathcal{E}(B_K)}{\mathcal{E}(\mathbf{a}_{\overline{K}|})}\,\mathbf{a}_{\overline{K-m}|}\,|\,K > m\right]$$

$$t_3 = \underbrace{\mathcal{E}\left({}_mB_K|K > m\right)}_{bm} - \frac{\overbrace{\mathcal{E}(B_K)}^{b_0}}{\underbrace{\mathcal{E}(\mathbf{a}_{\overline{K}|})}_{\mathbf{a}_x^a}}\,\underbrace{\mathcal{E}\left(\mathbf{a}_{\overline{K-m}|}|K > m\right)}_{\mathbf{a}_{x+m}^a}$$

$$t_3 = b_m - \frac{b_0}{\mathbf{a}_x^a}\,\mathbf{a}_{x+m}^a \text{ : versmath. Teilwert}$$

$$P_x = \frac{\mathcal{E}(B_K)}{\mathcal{E}(\mathbf{a}_{\overline{K}|})} = \frac{b_0}{\mathbf{a}_x^a} \quad \text{: konstante Prämie}$$

4.2.4 Näherungen

$$t_2 = \mathcal{E}\left[{}_mB_K - \frac{\mathcal{E}\left(B_K|K>m\right)}{\mathcal{E}\left(a_{\overline{K}|}|K>m\right)}\, a_{\overline{K-m}|}\,|\,K>m\right]$$

$$t_2 = \mathcal{E}({}_mB_K|K>m) - \frac{\mathcal{E}(B_K|K>m)}{\mathcal{E}(a_{\overline{K}|}|K>m)}\,\mathcal{E}(a_{\overline{K-m}|}\,|\,K>m)$$

$$P_{xm} = \frac{\mathcal{E}(B_K|K>m)}{\mathcal{E}(a_{\overline{K}|}\,|\,K>m)} : \quad \text{stichtagsabhängige Prämie}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(B_K|\,K>m\right) &= \mathcal{E}\left(v^K E_K|K>m\right) \\
&= \mathcal{E}\left(v^m v^{K-m} E_K|K>m\right) \\
&= v^m\,\mathcal{E}\left(v^{K-m} E_K|K>m\right) \\
&= v^m\,\mathcal{E}({}_mB_K|K>m) \\
&= v^m b_m
\end{aligned}$$

4.2.4 Näherungen

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(a_{\overline{K}|} \,|\, K > m\right) &= \mathcal{E}\left(a_{\overline{m}|} + v^m\, a_{\overline{K-m}|} \,|\, K > m\right)\\ &= a_{\overline{m}|} + v^m\, \mathcal{E}\left(a_{\overline{K-m}|} \,|\, K > m\right)\\ &= a_{\overline{m}|} + v^m\, a^a_{x+m}\end{aligned}$$

$$t_2 = b_m - \frac{v^m b_m}{a_{\overline{m}|} + v^m\, a^a_{x+m}}\, a^a_{x+m}$$ in der Schreibweise des Teilwerts

$$t_2 = b_m\, \frac{a_{\overline{m}|}}{a_{\overline{m}|} + v^m\, a^a_{x+m}}$$ als Barwert

$$\frac{a_{\overline{m}|}}{a_{\overline{m}|} + v^m\, a^a_{x+m}} \quad \text{statt} \quad \frac{a_{\overline{m}|}}{a_{\overline{m+k+1}|}} = \frac{a_{\overline{m}|}}{a_{\overline{m}|} + v^m a_{\overline{k+1}|}}\, :$$

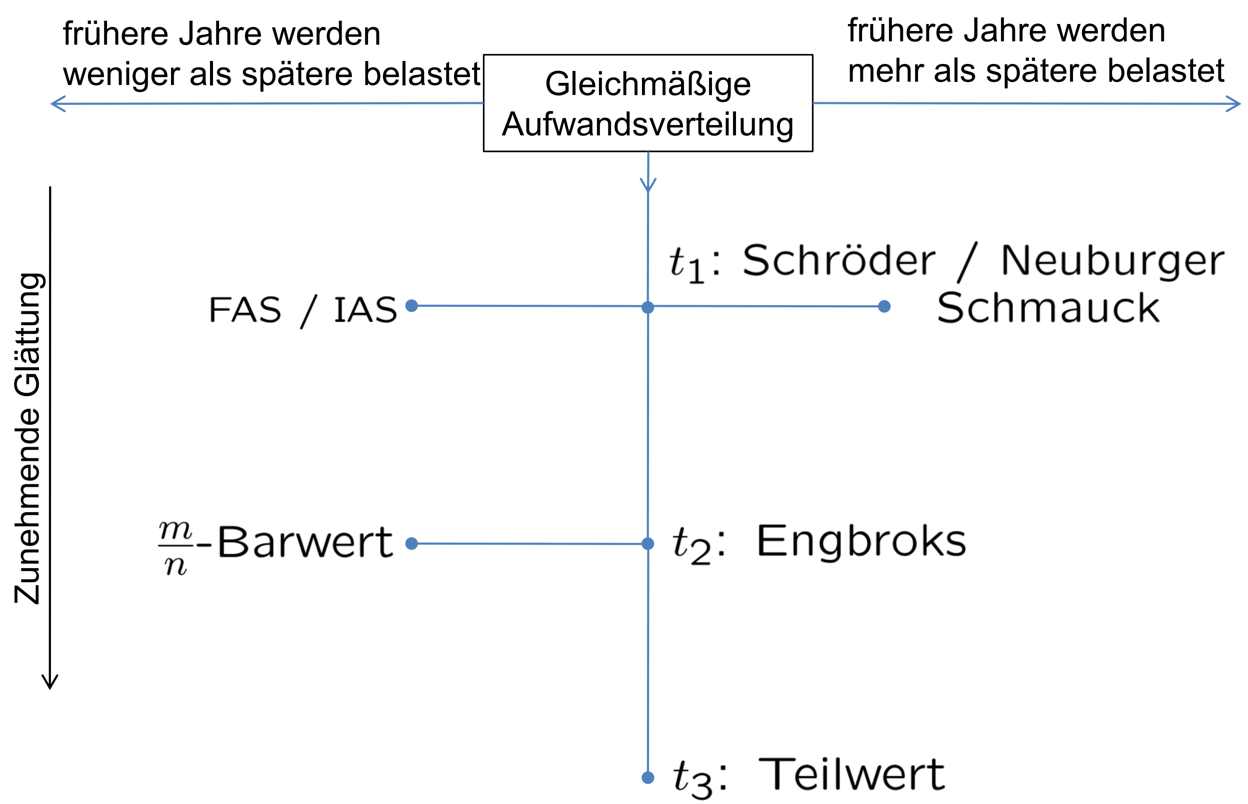
Engbroks 1989

4.2.4 Näherungen

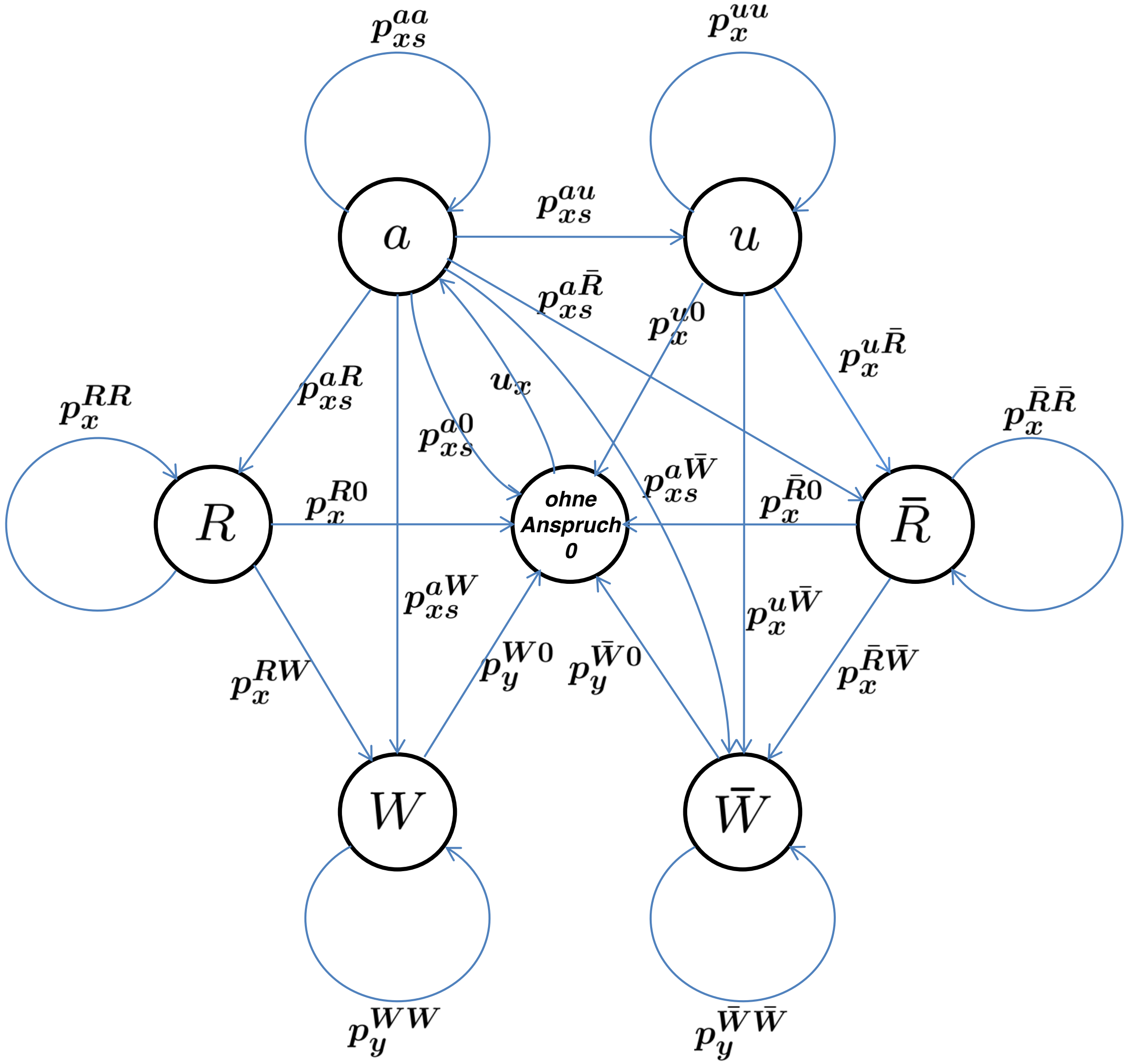
$$t_2 = \sum_{k \geq 0} v^{k+1}\, {}_k p^a_{x+m}\, q_{x+m+k} \frac{a_{\overline{m}|}\, E_{m+k+1}}{a_{\overline{m}|} + v^m\, a^a_{x+m}}$$

$$t_1 = \sum_{k \geq 0} v^{k+1}\, {}_k p^a_{x+m}\, q_{x+m+k} \frac{a_{\overline{m}|}\, E_{m+k+1}}{a_{\overline{m}|} + v^m\, a_{\overline{k+1}|}}$$

4.2.5 Vergleichende Übersicht



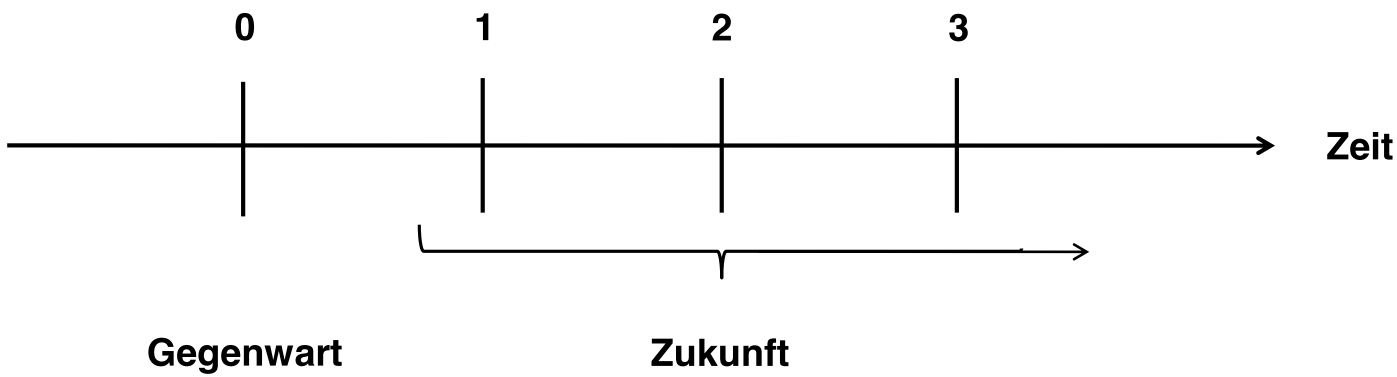
5 Prognoseverfahren


p_{xs}^{aa}
p_x^{uu}
a
u
p_{xs}^{au}
$p_{xs}^{a\bar{R}}$
p_x^{u0}
$p_x^{u\bar{R}}$
p_x^{RR}
p_{xs}^{aR}
u_x
p_{xs}^{a0}
$p_x^{\bar{R}\bar{R}}$
R
p_x^{R0}
ohne
Anspruch
0
$p_{xs}^{a\bar{W}}$
$p_x^{\bar{R}0}$
$\bar{R}$
p_{xs}^{aW}
$p_x^{u\bar{W}}$
p_x^{RW}
p_y^{W0}
$p_y^{\bar{W}0}$
$p_x^{\bar{R}\bar{W}}$
W
$\bar{W}$
p_y^{WW}
$p_y^{\bar{W}\bar{W}}$

5.1 Deterministische Verfahren

Zustände/ Kennzeichnung	Gesamtheiten: Bedeutung	Anzahl
a	Gesamtheit der betriebsinternen aktiven Berechtigten (interne Anwärter)	$\boldsymbol{L}$
R	Gesamtheit der Rentner aus internen Anwärtern	$\boldsymbol{L^R}$
W	Gesamtheit der Witwen (Witwer) aus internen Anwärtern	$\boldsymbol{L^W}$
u	Gesamtheit der mit unverfallbarem Anspruch ausgeschiedenen Anwärter (externe Anwärter)	$\boldsymbol{{}^U L}$
$\boldsymbol{\bar{R}}$	Gesamtheit der Rentner aus externen Anwärtern	$\boldsymbol{{}^U L^{\bar{R}}}$
$\boldsymbol{\bar{W}}$	Gesamtheit der Witwen (Witwer) aus externen Anwärtern	$\boldsymbol{{}^U L^{\bar{W}}}$
0	Gesamtheit der Nicht-Berechtigten	-

5.1 Deterministische Verfahren



5.1 Deterministische Verfahren

z.B.:

$^{U}L(m)$: **Anzahl der externen Anwärter zum Stichtag** m

z.B.:

$u_x(m)$: **Zugangsalterverteilung zum Stichtag** m

Weiter:

p_{xs}^{aa} :

Verbleibswahrscheinlichkeiten eines internen Anwärters des Alters x **mit Eintrittsalter** s**, das Alter** $x+1$ **als interner Anwärter am darauffolgenden Stichtag zu erreichen.**

p_{xs}^{au} :

Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s, zum darauffolgenden Stichtag zum Bestand der externen Anwärter zu gehören.

5.1 Deterministische Verfahren

$p_{xs}^{a\bar{W}}$:

Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s, zum darauffolgenden Stichtag eine Witwe im Bestand der Witwen aus den externen Anwärtern hinterlassen zu haben, was bedeutet, in einem Jahr unter Beibehaltung seines Anspruchs aus dem Unternehmen auszutreten und im selben Jahr entweder zunächst invalide zu werden und anschließend, immer noch im selben Jahr, unter Hinterlassung einer Witwe zu sterben, oder direkt als externer Anwärter unter Hinterlassung einer Witwe zu sterben.

Bem.: Reaktivierungs- und Wiederverheiratungswahrscheinlichkeiten fehlen.

Bem.: Bei den deterministischen Verfahren werden die Wahrscheinlichkeiten als Quoten benutzt.

5.1 Deterministische Verfahren

$$\boldsymbol{L_{xs}(m)}:$$

Anzahl der internen Anwärter des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag m

$$\boldsymbol{{}^{U}_{u}L_{xs}(m)}:$$

Anzahl der externen Anwärter des Alters x mit Übergangsalter u und Eintrittsalter s zum Stichtag m.

Übergangsalter: Alter, in dem der Anwärter vom Status des internen Anwärters zum Status des externen Anwärters wechselt.

5.1 Deterministische Verfahren

Sei

$Z(m)$: Anzahl der Neuzugänge in $]m-1, m]$

$u_x(m)$: Anteil des Neuzugangs in $]m-1, m]$, der zum Stichtag das Alter x hat

Es folgt für ein Eintrittsalter s:

$$L_{ss}(m) = Z(m)u_s(m)$$

Wir wählen:

$$Z(m) = Z_0(m)$$

$$u_x(m) = u_x = \text{const. für alle}\, m$$

mit

$$Z_0(m):$$

Anzahl der jährlich ausscheidenden, internen Anwärter. Dadurch bleibt der Bestand der internen Anwärter konstant.

Es folgt:

$$L_{ss}(m) = Z_0(m)u_s$$

Für die restlichen internen Anwärter gilt weiter:

$$L_{xs}(m) = L_{x-1,s}(m-1)p^{aa}_{x-1,s}, \quad s < x < z.$$

Bem.: z: **Pensionierungsalter**

Weiteres Beispiel: Externe Anwärter:

$$ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{u+1,s}(m) = L_{us}(m-1)p_{us}^{au} $$

Übrige externe Anwärter:

$$ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{x+1,s}(m) = {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{xs}(m-1)p_{x}^{uu}, \quad x > u $$

5.1 Deterministische Verfahren

„Fortschreibungsformeln“

Analog: Fortschreibungsformeln für Rentner und Witwen (Witwer)

Bem.: Es sei darauf hingewiesen, dass das vorgestellte Modell die Berechtigten in Klassen aufteilt, z.B. die internen Anwärter in Klassen nach x und s, d.h. nach Alter und Eintrittsalter. Diese Klasseneinteilung dürfte zur Charakterisierung der interessierenden Größen eines gegebenen Bestandes von vielen Berechtigten in den meisten Fällen nicht ausreichen, mit einer Ausnahme: für einen atomaren Bestand, also für einen Bestand, der nur aus einem einzigen Berechtigten besteht.

5.1 Deterministische Verfahren

Bei diesem Bestand sind alle Bestimmungsstücke, die zur Berechnung der interessierenden Größen notwendig sind, auch für die einzelnen Klassen angebbar: sind sie doch durch den Berechtigten selbst charakterisiert. Man kann daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass auch für einen gegebenen Bestand von vielen Berechtigten eine Klasseneinteilung nach einigen Altern zulässig ist: man teilt den gegebenen Bestand in atomare Bestände, d.h. einzelne Berechtigten auf, berechnet für jeden atomaren Bestand die interessierenden Größen, und addiert diese auf, so die entsprechenden Größen des gegebenen Bestands erhaltend. Von dieser Vorstellung wollen wir im folgenden ausgehen.

5.1 Deterministische Verfahren

Def.:

$$\mathcal{L}(m) := (L_{xs}(m)) : \text{ Struktur der int. Anwärter, zweidim.}$$

z.B.

$$L(m) = \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{x=s}^{z-1} L_{xs}(m):$$

Gesamtzahl der internen Anwärtern zum Stichtag m.

$${}^{U}\mathcal{L}(m) := ({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{xs}(m)) : \text{ Struktur der ext. Anwärter, dreidim.}$$

z.B.

$${}^{U}L(m) = \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{u=s}^{z-1} \sum_{x=u+1}^{z-1} {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{xs}(m):$$

Gesamtzahl der externen Anwärter zum Stichtag m.

5.1 Deterministische Verfahren

Fortschreibungsformeln:

$\mathcal{L}(m) = F[\mathcal{L}(m-1), Z_0(m)]$	**Struktur der internen Anwärter zum Stichtag** m
${}^{U}\mathcal{L}(m) = G[{}^{U}\mathcal{L}(m-1),\ \mathcal{L}(m-1)]$	**Struktur der externen Anwärter zum Stichtag** m

F: Fortschreibungsformel für die internen Anwärter

G: Fortschreibungsformel für die externen Anwärter

5.1 Deterministische Verfahren

Beispiel für die Prognose einer finanziellen Größe: Teilwert der Verpflichtungen zu einem Stichtag.

Bezeichnungen:

$V_{xs}(m)$	:	**gesamter Teilwert der internen Anwärter des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag m**
${}^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m)$	:	**gesamter Teilwert der externen Anwärter des Alters x mit Übergangsalter $u+\frac{1}{2}$ und Eintrittsalter s zum Stichtag m.**

Zugehörige zwei- bzw. drei-dimensionale Strukturen:

$$\mathcal{V}(m) := (V_{xs}(m))$$

$${}^{U}\mathcal{V}(m) := \left({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m)\right)$$

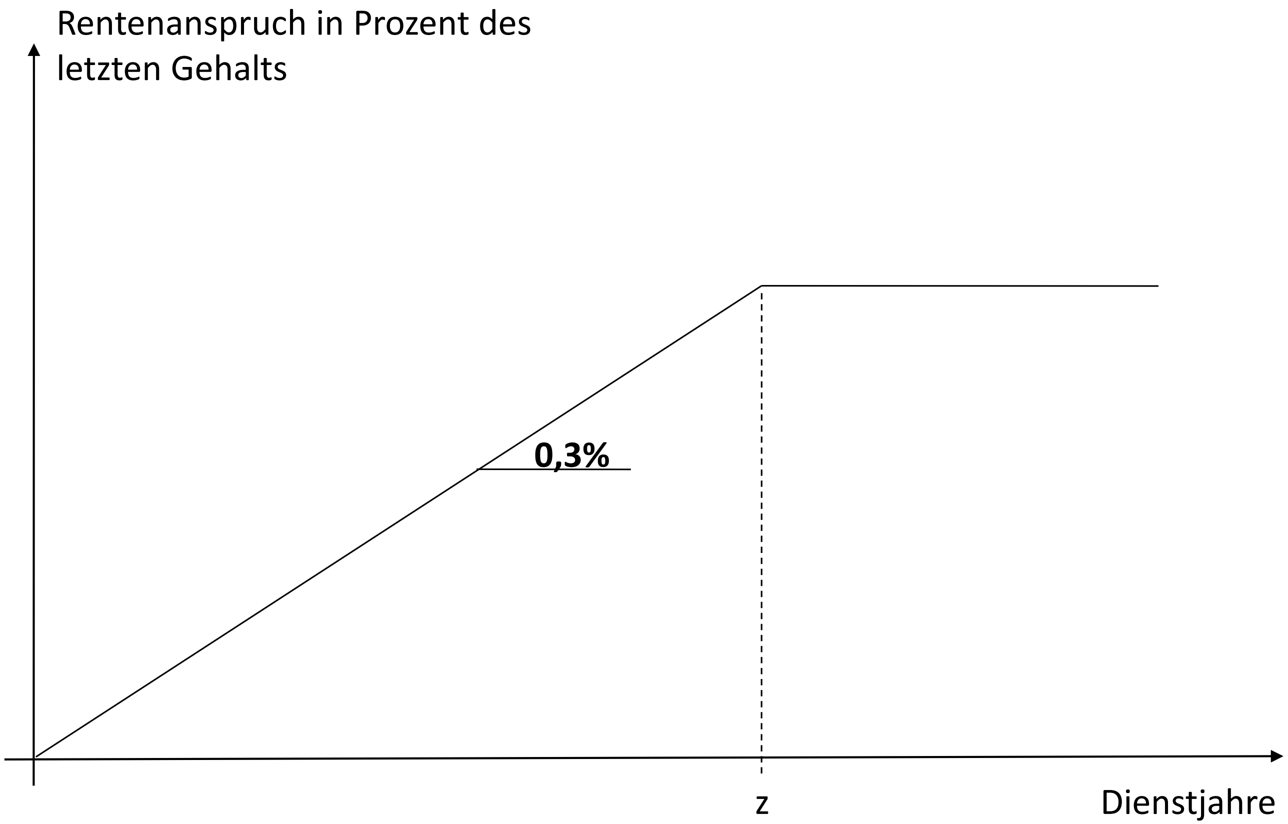
5.1 Deterministische Verfahren

Z.B.:

$\sum_{s=0}^{z-1} \sum_{x=s}^{z-1} V_{xs}(m)$: **gesamter Teilwert aller internen Anwärter des betrachteten Bestands zum Stichtag m.**

Wir spezialisieren uns auf eine dienstzeit- und gehaltsabhängige Zusage: Für jedes Dienstjahr werden 0,3 % des letzten Gehalts gewährt.

5.1 Deterministische Verfahren



5.1 Deterministische Verfahren

Gehaltssteigerungsfaktor: $\boldsymbol{\sigma}$

$$\text{z.B.: } \boldsymbol{\sigma} = 1,02$$

V_{xs} : **Teilwert eines internen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag 0**

$\boldsymbol{\sigma}\mathrm{V}_{xs}$: **Teilwert eines internen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag 1**

$\boldsymbol{\sigma}^m\ \mathrm{V}_{xs}$: **Teilwert eines internen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag m**

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{V_{xs}(0) = \mathrm{v}_{xs}\, L_{xs}(0)}$: **Gesamter Teilwert der internen Anwärter des Alters $\boldsymbol{x}$ mit Eintrittsalter $\boldsymbol{s}$ zum Stichtag 0**

$\boldsymbol{V_{xs}(m) = \sigma^m\, \mathrm{v}_{xs}\, L_{xs}(m)}$: **Gesamter Teilwert der internen Anwärter des Alters $\boldsymbol{x}$ mit Eintrittsalter $\boldsymbol{s}$ zum Stichtag $\boldsymbol{m}$**

5.1 Deterministische Verfahren

Analog:

$\overset{U}{\underset{u+\frac{1}{2}}{}}\mathrm{V}_{xs}$: **Teilwert eines externen Anwärters des Alters x mit Übergangsalter $u+\frac{1}{2}$ und Eintrittsalter s zum Stichtag 0**

$\overset{U}{\underset{u+\frac{1}{2}}{}}V_{xs}(m) = \sigma^m \, \overset{U}{\underset{u+\frac{1}{2}}{}}\mathrm{V}_{xs} \; \overset{U}{\underset{u+\frac{1}{2}}{}}L_{xs}(m)$: **Teilwert der externen Anwärter zum Stichtag m**

Bem.: In $\overset{U}{\underset{u+\frac{1}{2}}{}}\mathrm{V}_{xs}$ ist zu berücksichtigen, dass ab dem Übergangsalter $u+\frac{1}{2}$ keine Anpassung der Bemessungsgrundlage „Gehalt“ mehr erfolgt.

5.1 Deterministische Verfahren

Strukturen:

$$\boldsymbol{v} := (\mathrm{v}_{\boldsymbol{xs}})$$

$$^{U}\boldsymbol{v} := ({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{\boldsymbol{xs}})$$

„$\times$“ : elementweise Multiplikation gleich dimensionierter Strukturen

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{\sigma}^{m}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m})$$

$$^{U}\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{\sigma}^{m}\;{}^{U}\boldsymbol{v} \times {}^{U}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m})$$

5.1 Deterministische Verfahren

Zusammenfassung:

Bestandsgrößen und Teilwertbeträge der internen Anwärter:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m}-1), \boldsymbol{Z}_0(\boldsymbol{m})]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{m}}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m})$$

Bestandsgrößen und Teilwertbeträge der externen Anwärter:

$$^{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{G}\left[^{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m}-1),\ \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m}-1)\right]$$

$$^{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{m}}\ {}^{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{v} \times {}^{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{m})$$

Analog: Rentner- und Witwen/Witwerbestände; auch weitere interessierende Größen

Z.B.:

$\sum_{s=0}^{x} \sum_{u=s}^{x-1} {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m)$: **Teilwert der x-jährigen externen Anwärter zum Stichtag m**

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

5.2.1 Bestandssimulation der internen Anwärter

Atomarer Bestand d.h., konkreter einzelner interner Anwärter des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag 0:

$L_{xs}(0) = 1$	:	**Interner Anwärter des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag 0 (Gegenwart)**
$\hat{L}_{xs}(m),\ m = 1, 2, \ldots$		**Bernoullivariable (Wert 0 oder 1):** **Belegungszahl der internen Anwärter des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag m**

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

B_{xs} Bernoullivariable, unabhängig

$B_{xs} = 1$ mit Wahrscheinlichkeit $p_{xs}^{aa}, \; x > s$

Def.: $\hat{L}_{xs}(m) \; = \hat{L}_{x-1,s}(m-1) B_{x-1,s}$,

$$x > s, \; m = 1, 2, \ldots$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{L}_{xs}(m)) &= \mathcal{E}(\hat{L}_{x-1,s}(m-1)) \; \mathcal{E}(B_{x-1,s}) \\ &= L_{x-1,s}(m-1) \, p_{xs}^{aa} \\ &= L_{xs}(m), \end{aligned}$$

$$m = 0, 1, \ldots \text{ (bei } L_{xs}(0) = 1)$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

Neuzugang ($x = s$):

$\hat{L}_{ss}(m)$, $m = 0, 1, \ldots$: **Belegungszahl der internen Anwärter des Alters s mit Eintrittsalter s zum Stichtag m mit Verteilung u_s, $s = 0, 1, \ldots, z-1$**

Falls

$$\begin{aligned} \hat{L}_{x-1,s}(m-1) &= 1, \\ \hat{L}_{xs}(m) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

s' **gemäß Verteilung** u_s, $s = 0, \ldots, z-1$

$$\hat{L}_{s's'}(m) = 1$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

Realisierungen von $\hat{L}_{xs},\ x \geq s$:

$$\tilde{L}_{xs}^{(k)}(m) \quad , m = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, n \quad (n \text{ groß})$$

$\Longrightarrow$

$$L_{xs}(m) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{L}_{xs}^{(k)}(m) \quad m = 0, 1, 2, \ldots :$$

Schätzung für $L_{xs}(m)$

$$var(\hat{L}_{xs}(m)) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left[\tilde{L}_{xs}^{(k)}(m) - L_{xs}(m) \right]^2$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

5.2.2 Simulation der Teilwerte der internen Anwärter

$\hat{V}_{xs}(m),\ m = 0, 1, \ldots$: **Zufallsgröße Teilwert des internen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s zum Stichtag m**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{xs}(m) &= \sigma^{m}{}_{\mathrm{V}xs}\hat{L}_{xs}(m), \quad m = 0, 1, \ldots \\ \mathcal{E}(\hat{V}_{xs}(m)) &= V_{xs}(m), \qquad\qquad m = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

Realisierungen $\tilde{V}_{xs}^{(k)}(m)$, $m = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, n$ **gemäß:**

$$\tilde{V}_{xs}^{(k)}(m) = \sigma^{m}{}_{\mathrm{V}_{xs}} \tilde{L}_{xs}^{(k)}(m),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

$\Longrightarrow$

$$V_{xs}(m) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{V}_{xs}^{(k)}(m), \quad m = 0, 1, \ldots$$

$$var(\hat{V}_{xs}(m)) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left[\tilde{V}_{xs}^{(k)}(m) - V_{xs}(m) \right]^2$$

5.2.3 Externe Anwärter

${}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{x+1,s}(m)$, $s \leq u \leq x$, $m = 0, 1, \ldots$: Bernoullivariable:

Belegungszahl der externen Anwärter des Alters $x + 1$ mit Eintrittsalter s und Übergangsalter $u + \frac{1}{2}$ zum Stichtag m

${}^{U}B_{xs}$, $s \leq u \leq x$: Bernoullivariable, unabhängig:

$$\begin{aligned} {}^{U}B_{xs} &= 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p^{au}_{us} \text{ für } x = u \\ &= 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p^{uu}_{x} \text{ für } x > u \end{aligned}$$

Def.: $$\begin{aligned} {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{x+1,s}(m) &= \hat{L}_{xs}(m-1)\, {}^{U}B_{xs} \text{ für } x = u, \\ &= {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{xs}(m-1)\, {}^{U}B_{xs} \text{ für } x > u,\ m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

Es gilt:

$$\mathcal{E}\left({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{x+1,s}(m)\right) = {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{x+1,s}(m), \quad s \le u \le x, m = 0, 1, \ldots$$

Realisierungen ${}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{L}^{(k)}_{x+1,s}(m)$ **von** ${}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{x+1,s}(m)$,

$$m = 0, 1, \ldots, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

$\Longrightarrow$

$${}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{x+1,s}(m) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{L}^{(k)}_{x+1,s}, \; m = 0, 1, \ldots :$$

Schätzung für ${}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{x+1,s}(m)$

$$\operatorname{var}\left({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{x+1,s}(m)\right) \approx \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[{}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{L}^{(k)}_{x+1,s}(m) - {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}L_{x+1,s}(m)\right]^2$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

Teilwerte:

$^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m),\ s \leq u \leq x,\ m = 0, 1, \ldots$ **Zufallsgröße Teilwert des externen Anwärters des Alters x mit Eintrittsalter s und Übergangsalter $u + \frac{1}{2}$ zum Stichtag m**

Es gilt:

$$^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{V}_{xs}(m) = \sigma^{m}\ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\mathrm{V}_{xs}\ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{L}_{xs}(m),\ m = 0, 1, \ldots$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{E}\left({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{V}_{xs}(m)\right) = {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m),\ m = 0, 1, \ldots$$

5.2 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Verfahren)

Realisierungen $\quad {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{V}^{(k)}_{xs}(m),\ k = 1, 2, \ldots, n$ **gemäß**

$$ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{V}^{(k)}_{xs}(m) = \sigma^{m}\ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\mathrm{V}_{xs}\ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{L}^{(k)}_{xs}(m) $$

$\Longrightarrow$

$$ {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{V}^{(k)}_{xs}(m),\ m = 0, 1, \ldots $$

$$ var\left({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\hat{V}_{xs}(m)\right) \approx \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{U}_{u+\frac{1}{2}}\tilde{V}^{(k)}_{xs}(m) - {}^{U}_{u+\frac{1}{2}}V_{xs}(m)\right)^{2} $$

5.3 Der Beharrungszustand

Es gilt für interne Anwärter:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}(m) \to \mathcal{L} \\ Z_0(m) \to Z_0\end{array}\right. \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\mathcal{V}(m)}{\sigma^m} \to \mathcal{V} := v \times \mathcal{L} \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

Relativer Beharrungszustand der finanziellen Größen

5.3 Der Beharrungszustand

Externe Anwärter:

$$ {}^{U}\mathcal{L}(m) \to {}^{U}\mathcal{L} \quad \text{für} \quad m \to \infty $$

$$ \frac{{}^{U}\mathcal{V}(m)}{\sigma^{m}} \to {}^{U}\mathcal{V} := {}^{U}v \times {}^{U}\mathcal{L} \quad \text{für} \quad m \to \infty $$

Direkte Berechnung der Werte des Beharrungszustands:

F **stetig:**

$$ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(m) & = & F[\mathcal{L}(m-1), Z_0(m)] \\ \downarrow & & \;\;\downarrow \qquad\quad \swarrow \\ \mathcal{L} & = & F(\mathcal{L}, Z_0) \end{array} \qquad \text{für} \quad \mathrm{m} \to \infty $$

$\Longrightarrow$

$\mathcal{V} = v \times \mathcal{L}$: **Gesamter Teilwert der internen Anwärter im relativen Beharrungszustand**

5.3 Der Beharrungszustand

Analog: G stetig:

$$\begin{array}{ccc} {}^{U}\mathcal{L}(m) & = & G[\,{}^{U}\mathcal{L}(m-1),\ \mathcal{L}(m-1)] \\ \downarrow & & \quad\ \downarrow \qquad\qquad \swarrow \\ {}^{U}\mathcal{L} & = & G(\,{}^{U}\mathcal{L}\,, \mathcal{L}) \end{array}$$

$\Longrightarrow$

${}^{U}\mathcal{V} = {}^{U}v \times {}^{U}\mathcal{L}$: **Gesamter Teilwert der externen Anwärter im relativen Beharrungszustand**

5.3 Der Beharrungszustand

Zusammenfassung

1. Anzahl der internen bzw. externen Anwärter:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(m) = F[\mathcal{L}(m-1), Z_0(m)]}$$

$$\boldsymbol{{}^U\mathcal{L}(m) = G[\,{}^U\mathcal{L}(m-1),\ \mathcal{L}(m-1)]}$$

Zugehörige Teilwerte:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}(m) = \sigma^m\, v\ \times\ \mathcal{L}(m)}$$

$$\boldsymbol{{}^U\mathcal{V}(m) = \sigma^m\ {}^U v\ \times\ {}^U\mathcal{L}(m)}$$

„Fortschreibung "

5.3 Der Beharrungszustand

2. Beharrungszustand:

$$\mathcal{L}(m) \to \mathcal{L}$$

$$^{U}\mathcal{L}(m) \to {}^{U}\mathcal{L}$$

$$\frac{\mathcal{V}(m)}{\sigma^m} \to \mathcal{V} = v \times \mathcal{L}$$

$$\frac{^{U}\mathcal{V}(m)}{\sigma^m}\ {}^{U}\mathcal{V} = {}^{U}v \times {}^{U}\mathcal{L}$$

„Beharrungszustand durch Fortschreibung “

5.3 Der Beharrungszustand

3. Beharrungszustand:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mathcal{L}}, \boldsymbol{Z}_0)$$

$${}^{U}\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{G}({}^{U}\boldsymbol{\mathcal{L}}, \boldsymbol{\mathcal{L}})$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{L}}$$

$${}^{U}\boldsymbol{\mathcal{V}} =^{U} \boldsymbol{v} \times {}^{U}\boldsymbol{\mathcal{L}}$$

„Beharrungszustandsgleichungen“
„Direktes Verfahren“

Anwendungsbeispiele

Beispiel 1:
Die Jahresrentenbelastung (Beharrungszustand als Zielgröße)

Kenngröße Rentenbelastungsindex:

$$\begin{aligned} r(m) &= \frac{R(m)}{G(m)} \\ &= \frac{\text{Gesamte Rentenbelastung zum Stichtag } m}{\text{Lohn- und Gehaltssumme zum Stichtag } m}: \end{aligned}$$

jährliche Rentenbelastung in Prozent der Lohn- und Gehaltssumme.

5.3 Der Beharrungszustand

Es gilt:

$$\mathrm{r(m)} \to \boldsymbol{r} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{m} \to \infty$$

Frage: Kann $\boldsymbol{r}$ als Dotierungsrahmen einer betrieblichen Altersversorgung herangezogen werden?

Frage: Ist $\boldsymbol{r}$ für die Praxis von Bedeutung?

Probleme (Offene Fragen) zur Aussagekraft von $\boldsymbol{r}$:

1. $sup_m \quad r(m) > r \quad ?$ **sogar**
   $sup_m \quad r(m) >> r \ ?$

2. $\exists$ **nicht zu großes** $m : r(m) \quad \approx \quad r \quad ?$

5.3 Der Beharrungszustand

Anwendungen in der Praxis:

Erscheint dieser Langfristwert r als auf die Dauer tragbar, dann bleibt das Versorgungswerk in einem gesunden Bereich (vage Aussagekraft).
Fällt der Wert r zu hoch aus, dann wird das Versorgungswerk auf die Dauer untragbar (hohe Aussagekraft).

Bem.: r ist sicherlich geeignet zum Verlgeich mehrerer (geplanter) Versorgungswerke

5.3 Der Beharrungszustand

Beispiel 2:

Die Jahresrentenbelastung (Beharrungszustand als Kontrollgröße)

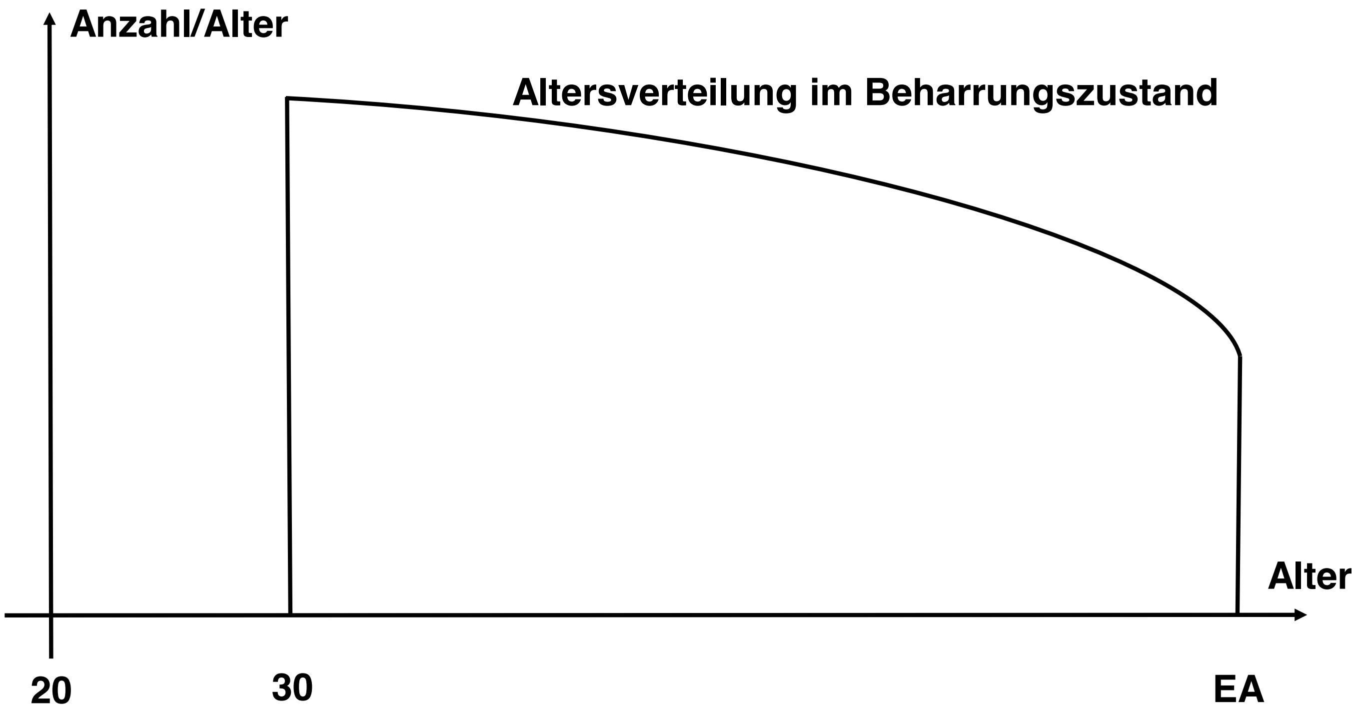
2.1 **Der Beharrungszustand nach dem direkten Verfahren als Probe einer Prognoserechnung**

2.2 **Schlüssigkeit der Annahmen für eine Prognoserechnung**

Regel: **Führen die Modellannahmen auch im Beharrungszustand zu einem Ergebnis, das realistisch erscheint, dann sind sie erst recht für kurzfristige Aussagen realistisch.**

5.3 Der Beharrungszustand

Z.B.: Ersatz eines ausgeschiedenen internen Anwärters durch einen 30 jährigen neueintretenden Anwärter:



5.4 Schlußbetrachtungen

1. **Aussagekraft prognostizierter Absolutgrößen (z.B. Anzahl, finanzielle Größe): ohne Angabe eines Streuungsbereichs nur Beispielcharakter.**
2. **Aussagekraft prognostizierter Relativgrößen (Indexgrößen): mit zunehmender Bestandsgröße entfällt der Zufallscharakter (Varianz $\rightarrow$ 0 mit zunehmender Bestandsgröße, asymptotisch-deterministische Größen)**
3. **Aussagekraft der Prognoseergebnisse einer einmaligen Simulation eines hinreichend homogenen Bestandes ohne Angabe eines Streuungsbereichs:**

3.1 Absolutgrößen sind reine Beispielfälle

3.2 Relativgrößen stellen gute Schätzungen dar

Folgerung: Man verwende für zukunftsbezogene Entscheidungen möglichst Relativgrößen

5.4 Schlußbetrachtungen

4. **Inwieweit führen prognostizierte Größen, benützt man sie für weitere Rechengänge, zu guten Schätzungen der entsprechenden tatsächlich zukünftig eintretenden Werte?**

   Z.B.: Direkt prognostiziert werden Rentenzahlungen und Lohn- und Gehaltssumme. Inwieweit liefert der Quotient beider Größen eine gute Schätzung für die Indexgröße „Rentenzahlungen in Prozent der Lohn- und Gehaltssumme"?

5. **Sensitivitätsanalyse**

   Abhängigkeit der prognostizierten Werte von den getroffenenen Annahmen

Vorsichtige Bewertung eines Rentnerbestandes (Abschn. 7.2)

1. Zentraler Grenzwertsatz

X_k, $k \in \mathbb{N}$: reellwertige unabhängige Zufallsgrößen, f.s. gleichmäßig beschränkt

$\mathcal{E} X_k =: \mu_k \, \forall k$

$var(X_k) =: \sigma_k^2 > 0 \; \forall k$ mit $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \infty$

$X := \sum_{k=1}^{n} X_k$

Satz:

$X \sim N(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \; \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$: X ist für große n asymptotisch normalverteilt

Vorsichtige Bewertung eines Rentnerbestandes (Abschn. 7.2)

2. Bewertung eines Bestandes von Rentenverpflichtungen

R_k: **Rentenverpflichtung gegenüber dem k-ten Rentner zum Stichtag**

x_k: **Alter des k-ten Rentners zum Stichtag**

B_k: **Erfüllungsbetrag der k-ten Rentenverpflichtung**

$$\mu_k := \mathcal{E}(B_k) = R_k\, \mathbf{a}_{x_k}$$

$$\sigma_k^2 := var(B_k) = \frac{R_k^2}{d^2}[A_{x_k}(v^2) - A_{x_k}^2(v)] > 0\ \forall k$$

$B_1, B_2, ...f.s.$ **gleichmäßig beschränkt**

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \infty$, **da für** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \infty$ **gelten müsste:**

$\sigma_k^2 \longrightarrow 0$ **f.** $k \longrightarrow \infty$

Vorsichtige Bewertung eines Rentnerbestandes (Abschn. 7.2)

Für n hinreichend groß:

$B = \sum_{k=1}^{n} B_k$ ist annähernd nach $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt mit

$$\mu := \sum_{k=1}^{n} \mu_k$$

$$\sigma^2 := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

Wählt man als Rückstellung $\mathcal{R} = \mu = \sum_{k=1}^{n} R_k a_{x_k}$, so reicht sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% aus, die Verpflichtung zu erfüllen

Vorsichtige Bewertung eines Rentnerbestandes (Abschn. 7.2)

Eine Rückstellung in Höhe von

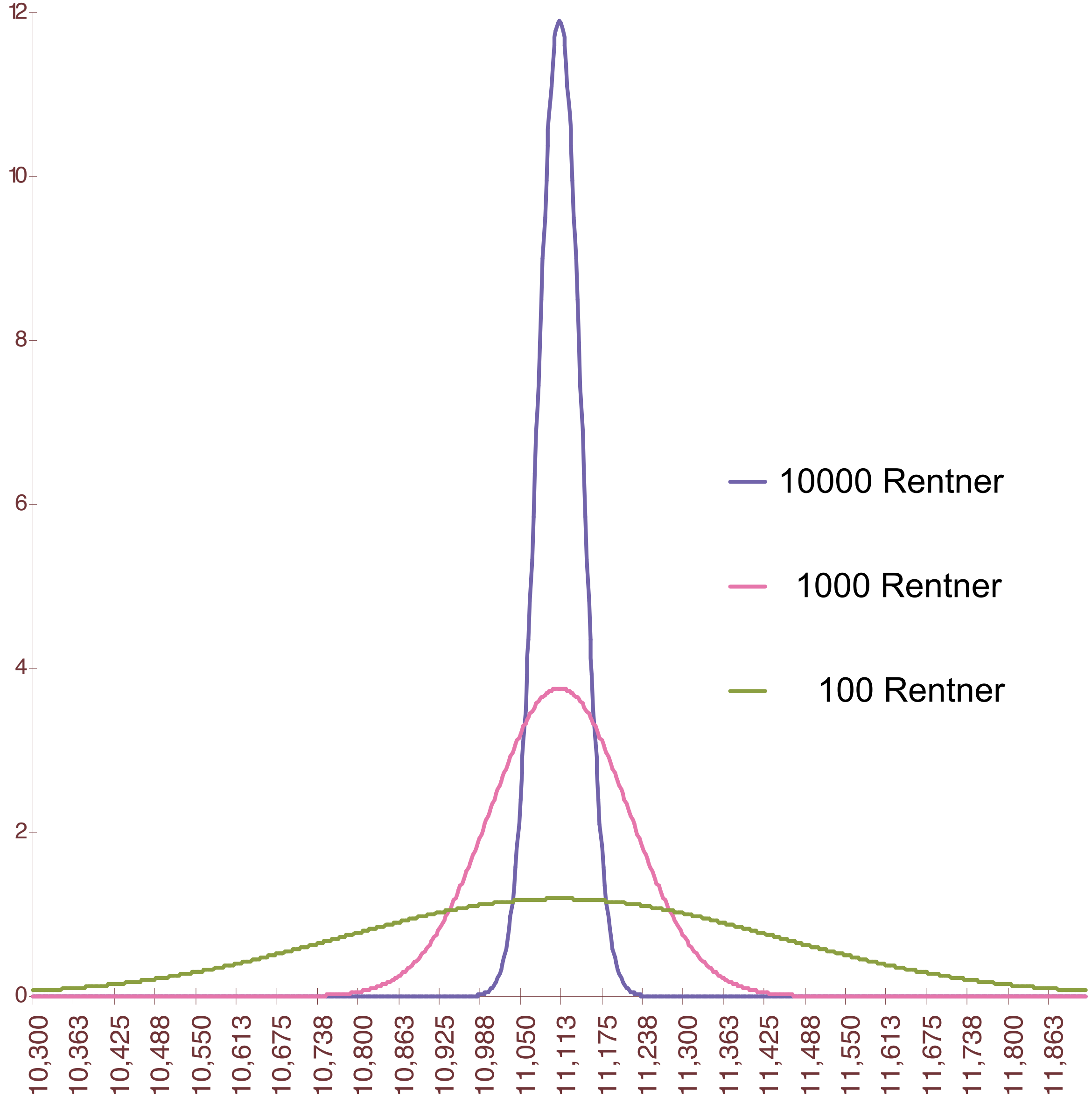
$$\mathcal{R} = \mu + \sigma = \sum_{k=1}^{n} R_k a_{x_k} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{R_k^2}{d^2}[A_{x_k}(v^2) - A_{x_k}^2(v)]}$$

reicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 84% aus.

Eine Rückstellung von $\mathcal{R} = \mu + 2\sigma$ reicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,7%, eine Rückstellung von $\mathcal{R} = \mu + 3\sigma$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9% aus (3 σ-Regel).

Vorsichtige Bewertung eines Rentnerbestandes

Normierte Dichten



6 Einbettung in die Praxis

Korbinian Meindl

06.07.2018

Agenda

Arbeitsrechtliches und betriebswirtschaftliches Umfeld

Rechnungsgrundlagen

Praktische Fragen der Prämien- und Reserveermittlung

Arbeitsrechtliches Umfeld

Definition der betrieblichen Altersversorgung

- Zusage des Arbeitgebers an den Arbeitnehmer aus Anlass eines Arbeitsverhältnisses
- Leistungen bei Eintritt eines biologischen Ereignisses
  - Erreichen des Pensionsalters (Üblich: 60 – 67 Jahre)
  - Invalidität (Berufs- und Erwerbsunfähigkeit, Erwerbsminderung)
  - Tod (Versorgungsberechtigt z.B. Witwe(r), Waise, Lebenspartner)
- Versorgungszweck
  - keine bAV bei Unterstützung für z.B. Arbeitslosigkeit, Krankheit

Arbeitsrechtliches Umfeld

Gesetzlicher Rahmen: Betriebsrentengesetz (BetrAVG)

Enthält Rahmenbedingungen und Mindestnormen u.a. für

- Durchführungswege der betrieblichen Altersversorgung
- Unverfallbarkeit
- Abfindung
- Portabilität
- Insolvenzsicherung
- Anpassung laufender Leistung

Arbeitsrechtliches Umfeld

Durchführungswege

- Unmittelbare Versorgungszusage
- Unterstützungskasse
- Pensionskasse
- Pensionsfonds
- Direktversicherung

Arbeitsrechtliches Umfeld

Arbeitsrechtliche Grundlagen

- Arbeitsvertrag
- Einzelzusage/Gesamtzusage
- Betriebsvereinbarung
- Tarifvertrag
- Gesetz als Rechtsgrundlage für betriebliche Altersversorgung
- betriebliche Übung
- mündliche Zusage
- Rechtsprechung (z.B. Gleichbehandlung)
- Betriebsrentengesetz

Arbeitsrechtliches Umfeld

Verpflichtungsinhalte

- Leistungszusage
  - Gesamtversorgungszusage
  - End-/Durchschnittsgehaltsplan
  - Festbetragszusage
- beitragsorientierte Leistungszusage
  - „Bausteinzusage“
- Beitragszusage mit Mindestleistung
  - mindestens zugesagte Beiträge, soweit nicht rechnungsmäßig für biometrischen Risikoausgleich verbraucht
- reine Beitragszusage (defined contribution)

Betriebswirtschaftliches Umfeld

Bewertung von Pensionsverpflichtungen

- Jahresabschluss
  - Handelsbilanz (HGB)
  - Steuerbilanz (EStG)
  - internationaler Abschluss (IFRS, US-GAAP)
- Kostenrechnung
- Unternehmensbewertung
- Unternehmensplanung
- Einführung und Änderung von Zusagen
- Übertragung von Verpflichtungen
- Versorgungsausgleich

Betriebswirtschaftliches Umfeld

Aktuarielle Begleitung von Versorgungseinrichtungen

- Kalkulation von Beiträgen und Leistungen
- Kontrolle der Rechnungsgrundlagen
- Ermittlung der Deckungsrückstellung
- Versicherungstechnische Bilanz
- Überschussverwendung
- Solvabilität
- Einzelfallbetrachtungen (!)

Agenda

Arbeitsrechtliches und betriebswirtschaftliches Umfeld

Rechnungsgrundlagen

Praktische Fragen der Prämien- und Reserveermittlung

Rechnungsgrundlagen

Typische Rechnungsgrundlagen sind:

- Ausscheideordnung
- Rechnungszins
- Trendannahmen (z. B. Gehaltstrend, Rententrend)
- Sicherheitszu- oder abschläge
- Kosten

Arten von Rechnungsgrundlagen

- Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung
  - Erwartungswert der betrachteten Größe
  - enthalten damit keine Sicherheiten
- Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung
  - vorsichtig gewählte Rechnungsgrundlagen
  - bieten aus Sicht des Unternehmens daher mehr Sicherheit, die zugesagten Leistungen zukünftig erfüllen zu können
  - werden zur Berechnung der Deckungsrückstellung und zur Kalkulation von Beiträgen verwendet
- Perioden- und Generationensterbetafeln
  - Basistafel als Ausgangsmaterial
  - Periodentafel als in die Zukunft projizierte Basistafel
  - Generationentafel als geburtsjahresabhängige sukzessive Projektion der Basistafel

Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung

- Biometrische Rechnungsgrundlagen
  - Berücksichtigung der unterschiedlichen Komponenten des versicherungstechnischen Risikos (Zufalls-, Änderungs- und Irrtumsrisiko)
  - Sicherheitszuschläge oder -abschläge
    - je nach zugesagter Leistungsart gibt es ein Erlebensfallrisiko bzw. ein Todesfall- / Invaliditätsrisiko
    - Bei einem Erlebensfallrisiko finden Sicherheitsabschläge Anwendung (z.B. DAV 2004 R)
    - Bei einem Todesfall- / Invaliditätsrisiko finden Sicherheitszuschläge Anwendung (z.B. DAV 2001 EM oder DAV 2008 T)
    - Gerade Pensionskassen und Pensionsfonds sehen jedoch häufig Leistungen vor, die nicht ausschließlich mit einem reinen Erlebensfallrisiko oder einem reinen Todesfall- / Invaliditätsrisiko verbunden sind

- Bei der Festlegung des aktuariell angemessenen Rechnungszinses wird von den erwarteten Kapitalerträgen ein Sicherheitsabschlag vorgenommen

- Bei der Festlegung von Kostenansätzen können Sicherheitszuschläge berücksichtigt werden

Biometrische Rechnungsgrundlagen - Beispiele

- private Rentenversicherung: DAV 2004 R
  - Lebenserwartung eines 65-jährigen Mannes - Geburtsjahrgang 1961: 27,6 Jahre
  - Lebenserwartung einer 65-jährigen Frau - Geburtsjahrgang 1961: 31,3 Jahre
- betriebliche Altersversorgung: Richttafeln 2005 G von Klaus Heubeck
  - Lebenserwartung eines 65-jährigen Mannes - Geburtsjahrgang 1961: 20,5 Jahre
  - Lebenserwartung einer 65-jährigen Frau - Geburtsjahrgang 1961: 24,5 Jahre
- Krankenversicherung: PKV-Sterbetafeln 2018
  - Lebenserwartung eines 65-jährigen Mannes: 22,0 Jahre
  - Lebenserwartung einer 65-jährigen Frau: 24,4 Jahre

Risikomerkmale von Ausscheidewahrscheinlichkeiten

- Risikomerkmale sind Eigenschaften, die in statistisch überprüfbarer Weise mit dem Erwartungswert zusammenhängen
- Häufig sind Ausscheidewahrscheinlichkeiten durch ein einzelnes Risikomerkmal nicht ausreichend charakterisiert, sondern es sind gleichzeitig mehrere Merkmale von Bedeutung (z.B. Alter und Geschlecht)
- Bei der Kalkulation trifft man dann die Annahme, dass die betrachteten Ausscheidewahrscheinlichkeiten nur von den Ausprägungen der gewählten Risikomerkmale abhängt
- Viele Eigenschaften werden allerdings gar nicht oder nur teilweise berücksichtigt (z.B. weil sie im konkreten Bestand nicht erfasst werden können)
- Auch dürfen Aktuare u.U. bei der Kalkulation von Prämien nicht nach beliebigen Merkmalen unterscheiden (z.B. Geschlecht)

Rechnungszins

Der Rechnungszins, der für die Kalkulation der (Deckungs-)Rückstellungen angesetzt wird, unterscheidet sich in den einzelnen Sparten ebenfalls deutlich:

- private Rentenversicherung: Höchstrechnungszins gemäß § 4 DeckRV von 0,9 %
- betriebliche Altersversorgung
  - Rechnungszins hängt stark vom gewählten Durchführungsweg ab
  - in der Direktversicherung analog zur privaten Rentenversicherung ebenfalls Höchstrechnungszins von 0,9 %
  - bei der steuerlichen Rückstellung für unmittelbare Pensionsverpflichtungen gemäß § 6a EStG 6 %
- Krankenversicherung: durch § 4 KVAV auf 3,5 % nach oben begrenzt

Kosten

Die Durchführung des Vertrages führt beim Unternehmen zu Kosten, die z.T. in der Kalkulation berücksichtigt werden.

- Kostenarten
  - Abschlusskosten (α-Kosten)
  - In- bzw. Exkassokosten (β-Kosten)
  - Verwaltungskosten (γ-Kosten)
- Kosten werden festgelegt als
  - proportionale Kosten (z.B. bezogen auf den Beitrag oder die Versicherungssumme)
  - Stückkosten

Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherungsmathematik - Beispiele

Bewertung von Direktzusagen in der **Handelsbilanz**

- Grundlagen: §§ 246, 249, 253 und 254 HGB sowie die Stellungnahmen des IDW RS HFA 28 und RS HFA 30
- Prinzip der bestmöglichen Schätzung, d.h. keine Sicherheitszuschläge
- Zins: gesetzlich vorgeschrieben und zwar als durchschnittlicher Marktzinssatz der jeweils letzten 10 Jahre
- Trendannahmen und Fluktuation sind explizit zu berücksichtigen
- geeignete Bewertungsverfahren: PUC-Methode, modifizierte Teilwertverfahren oder andere, dem Erwerb der Anrechte folgende Verfahren
- Ausscheideordnung i.d.R. Richttafeln 2005 G, z.T. in modifizierter Form
- i.d.R. kein Ansatz von Kostenzuschlägen
- Risiken bei der handelsrechtlichen Bewertung resultieren aus
  - Fehlern bei der Festlegung der Rechnungsgrundlagen
  - Fehleinschätzungen hinsichtlich des Umfangs der Verpflichtungen
  - zufallsbedingten Schwankungen (gerade bei kleineren Kollektiven)

Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherungsmathematik - Beispiele

Bewertung von Direktzusagen in der **Steuerbilanz**

- Grundlagen: § 6a EStG und die einschlägigen Richtlinien und Äußerungen der Finanzverwaltung
- Bewertungsverfahren: steuerliches Teilwertverfahren ohne besondere Berücksichtigung der Fluktuation (stattdessen Mindestalter vorgeschrieben)
- Zins: gesetzlich vorgeschriebener Rechnungszins von 6 %
- Trendannahmen: Künftige Erhöhungen sind nur einzubeziehen, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen
- Steuerliche Bewertung führt damit i.d.R. zu einer deutlichen Unterbewertung der Verpflichtungen und damit zu einer Besteuerung von fiktiven Gewinnen
- Für unterlassene Zuführungen gilt das Nachholverbot bis zur Beendigung des Dienstverhältnisses oder bis zum Rentenbeginn

Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherungsmathematik - Beispiele

Berechnung der Deckungsrückstellung bei **regulierten Pensionskassen**

- Rechnungsgrundlagen sind im Technischen Geschäftsplan festgelegt (nach Genehmigung durch die Aufsicht)
- Rechnungsgrundlagen sind vorsichtig zu wählen, um die dauernde Erfüllbarkeit der Leistungen zu gewährleisten
  - Somit Ansatz von Sicherheitszu- oder -abschlägen (z. B. bei der Ausscheideordnung) oder Sicherheitsabschlägen (z. B. beim Rechnungszins)
- Auch Kostenzuschläge werden in der Kalkulation berücksichtigt (i. d. R. keine Abschlusskosten)

Agenda

Zuordnung von Leistungen auf Alter

Die zu bewertende Verpflichtung ist i.a. nicht altersabhängig definiert. Insofern besteht ein Zuordnungsproblem: welchem Alter ist welche Leistung zuzuordnen?

- Rückrechnungsmethode
  - dem Pensionierungsalter z wird die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Dem Alter $x < z$ wird die Leistung zugeordnet, die der um $z - x$ geringeren Dienstzeit entsprecht.
- Stichtagsmethode
  - Dem Pensionierungsalter z wird ebenfalls die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Einem versicherungstechnischen Alter $x < z$ wird die Leistung zum nächsten Geburtstag zugeordnet.

Zuordnung von Leistungen auf Alter

Ist die Zuordnung der Leistungen auf ganzzahlige Alter erfolgt, so kann die Pensionszusage nun durch – entsprechend der Komplexität der Pensionszusage aufgegliederte – Rentenvektoren beschrieben werden, z. B. wie folgt:

- R_k^{aiA}: Höhe der jährlichen Rentenleistung bei Eintritt von Invalidität ($x+k<z$) und Erreichen der Altersgrenze ($x+k=z$).
- R_k^{aaw}: Höhe der jährlichen Rentenleistung bei Eintritt von Aktiventod ($x+k<z$) und Höhe der Anwartschaft auf Ehegattenrente nach Rentnertod ($x+k=z$).
- R_k^{aiw}: Höhe der jährlichen Rentenleistung bei Eintritt von Invalidentod. Diese hängt in der gewählten Aufgliederung nur vom Alter ($x+k<z$) bei Eintritt der Invalidität ab.

Mit Hilfe dieser Rentenvektoren können die ${}_k^{(t)}\hat{L}_x$ unter Berücksichtigung der Leistungshöhen wie folgt dargestellt werden:

$${}_k^{(t)}\hat{L}_x = R_k^{aiA} \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aiA} + R_k^{aaw} \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aaw} + R_k^{aiw} \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aiw}$$

Finanzierungsverfahren

- Umlageverfahren
  - Ausgabenumlageverfahren
  - Rentenwertumlageverfahren
- Deckungsabschnittsverfahren
- Anwartschaftsdeckungsverfahren
  - Einmalbeitragsverfahren
  - Teilwertverfahren
  - modifizierte Teilwertverfahren
  - Projected Unit Credit Method
- Kollektive Finanzierungsverfahren
  - Durchschnittsprämienverfahren
  - Bilanzausgleichsverfahren / Bedarfsdeckungsverfahren

Teilwertverfahren

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x &= {}_mB_x^L - P_x \cdot \ddot{a}^a_{x+m,\overline{n-m}|} \\
\text{mit} \quad P_x &= \frac{{}_0B_x^L}{\ddot{a}^a_{x,\overline{n}|}}
\end{aligned}
$$

wobei x das Eintrittsalter, m die seitdem abgelaufene Dauer und n die bis zur Altersgrenze mögliche Dauer bezeichnet.

Steuerliche Besonderheiten (§ 6a EStG):
x wird bestimmt am Beginn des Wirtschaftsjahres des Eintritts, Mindestalter je nach Zusagejahr 23, 27, 28 oder 30 Jahre. Ganzjährig vorschüssige Zahlung der Prämie, 6 % Zins, strenges Stichtagprinzip, Schriftform

modifiziertes Teilwertverfahren nach Engbroks

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x &= {}_mB_x^L - P_x^{(m)} \cdot \ddot{a}^a_{x+m\,\overline{n-m}|} \\
\text{mit} \quad P_x^{(m)} &= \frac{v^m \cdot {}_mB_x^L}{\ddot{a}_{\overline{m}|} + v^m \cdot \ddot{a}^a_{x+m\,\overline{n-m}|}}
\end{aligned}
$$

wobei x das Alter zu Beginn des Wirtschaftsjahres des Eintritts, m die seitdem abgelaufene Dauer und n die bis zur Altersgrenze mögliche Dauer bezeichnet

Projected Unit Credit Methode

$$ {}_mV_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k \cdot {}_kp^a_{x+m} \cdot \frac{m}{m+k} \cdot {}^{(t)}_{m+k}\hat{L}_x \quad m = 0, 1, \ldots, n $$

Anmerkungen:

- Die vorstehende Formel gilt für eine Leistungszusage. Die Leistungen werden als linear über die bis zum Versorgungsfall mögliche Dienstzeit erdient unterstellt.
- Passend zur Definition der ${}^{(t)}_{m+k}\hat{L}_x$ wurde in dieser Darstellung $\frac{m}{m+k}$ mit ganzzahligen Werten m und $m+k$ bestimmt. In der Praxis wird $m+k$ i. d. R. passend zum Verfahren der Anspruchszuordnung auf den Bewertungsstichtag ermittelt (z. B. $\frac{m}{m+k+\frac{1}{2}}$ für $m+k < n$).